UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

“FRANCISCO GARCÍA SALINAS”

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA AL ENFRENTARSE A ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN DESDE EARLY ALGEBRA

Tesis que para obtener el grado de

Maestra en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria

Presenta:

Teresita de Jesús Vera Ordóñez

Directora de tesis:

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Zacatecas, Zac., Junio 2024

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente se hace constar que el trabajo de grado que lleva por nombre "El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas de primaria al enfrentarse a actividades de generalización desde *Early Algebra*" y que fue realizado bajo mi asesoría por la C. Teresita de Jesús Vera Ordóñez estudiante de la Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria; ha atendido las sugerencias y recomendaciones establecidas en el proceso de revisión por parte del comité evaluador, **por lo que se encuentra listo para su presentación y defensa**. Lo anterior en los términos de la legislación vigente, correspondiente a la Universidad Autónoma de Zacatecas y aquella establecida en la Maestría.

Atentamente,

Zacatecas, Zac., a 28 de junio del 2024

Leticia Sosa G.

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Docente Investigadora de la UAM-UAZ

CARTA DE RESPONSABILIDAD Y CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Zacatecas, Zacatecas, el día 27 del mes de junio del año 2024, la que suscribe Teresita de Jesús Vera Ordóñez alumna del Programa de Maestría en Matemática Educativa con Orientación en el Nivel Secundaria con número de matrícula 42204675; manifiesta que es la autora intelectual del trabajo de grado intitulado "El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas de primaria al enfrentarse a actividades de generalización desde *Early Algebra*" bajo la dirección de la Dra. Leticia Sosa Guerrero.

Por tal motivo asume la responsabilidad sobre su contenido y el debido uso de referencias, acreditando la originalidad del mismo. Así mismo cede los derechos del trabajo anteriormente mencionado a la Universidad Autónoma de Zacatecas para su difusión con fines académicos y de investigación.

Teresita de Jesús Vera Ordóñez

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías
por el apoyo económico brindado mediante la
beca con número de registro de CVU 863061,
para la realización de mis estudios de Maestría.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, gracias a Dios y a la oración de mi madre que me ha acompañado en cada paso personal y profesional. Gracias a mi padre, mi hermano, mi hermana, a mis sobrinas, por ser pilar y motivación en cada decisión y camino que emprendo.

A mi asesora Dra. Lety Sosa, gracias por el acompañamiento, la dirección y por brindarme esa guía académica para lograr que este trabajo se consolidara. Gracias por incentivarme a disfrutar del proceso.

Gracias a mis profesoras de la Maestría, Dra. Caro, Mtra. Mónica, Dra. Darly, por contribuir a mi formación, por enriquecer este trabajo con sus comentarios, por esa parte humana que apoyó a mi formación desde un lugar de comprensión.

Agradezco a mis lectoras, Dra. Silvia y Mtra. Nancy, por aceptar acompañarme desde el inicio de este documento y por las aportaciones que enriquecieron el escrito. También agradezco a la Dra. Lily y a la Mtra. Ofelia, por formar parte del sínodo, por su tiempo, disposición y aportes. Gracias a la Dra. Lily por el diálogo profesional como parte de la estancia académica.

Mi agradecimiento a los profesores que participaron en este estudio, por su disposición y su confianza.

Gracias a la EMED, a un posgrado que le tengo un gran cariño porque constituyó un inicio en mi desarrollo profesional dentro de la Matemática Educativa.

Mi cariño y agradecimiento siempre a Matemáticas para Todos, por ser equipo, por ser familia y apoyarme en este proceso. Gracias por hacer más sencilla la construcción de este trabajo.

Gracias a los amigos académicos que he conocido en este camino de Matemática Educativa, por brindarme espacios de crecimiento profesional, por confiar en mí y animarme a continuar mi desarrollo profesional.

A mis compañeros de Maestría les agradezco porque estos dos años fueron de crecimiento en conjunto, porque sus aportaciones enriquecieron mi formación y porque su amistad hizo de este proceso un capítulo especial.

A mis hermanas mi agradecimiento siempre, por ser red de apoyo, por motivarme, por siempre estar presentes y recordarme que soy fuerte.

Gracias a mi compañera, porque no hubo un solo día de la construcción de este trabajo que no estuviera a mi lado, gracias por esa mirada que siempre me dijo: tú puedes. Gracias mi Vaquita.

A la familia que formé, Osvaldo, Zuky, Tití, Negrita, Panzoncita, Luna, gracias por ser motor, por ser mi lugar seguro y abrazarme. Gracias por la calidez de su amor.

Gracias a cada uno de los lugares y momentos donde escribí.

Gracias a la Teresita que perdió el miedo, que se volvió más comprensiva consigo misma y que traba por sus sueños.

RESUMEN

La literatura especializada afirma que la introducción de modos de pensamiento algebraico en una etapa temprana de los estudiantes genera la posibilidad de desarrollar concepciones matemáticas más profundas y complejas. Por lo que se han establecidos propuestas como *Early Algebra*, que plantean aprovechar los contenidos que se imparten en los primeros grados para desarrollar pensamiento algebraico temprano. Sin embargo, esto representa un desafío para los profesores.

La investigación en torno al profesorado de nivel primaria señalan que existe una falta de preparación para desarrollar propuestas como *Early Algebra*, derivada de las dificultades y desafíos que enfrentan éstos respecto a su conocimiento algebraico. Algunos hallazgos en nuestra disciplina exponen la necesidad de profundizar en el estudio sobre el conocimiento algebraico y los aspectos de generalización en el profesorado de nivel primaria.

Así, el objetivo de esta investigación es caracterizar los conocimientos que ponen en acción los profesores de primero y segundo de primaria cuando se enfrentan a actividades de *Early Algebra* que involucren el proceso de generalización. Para llevar a cabo este estudio se emplea como marco teórico el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), la propuesta curricular *Early Algebra*, y el proceso de generalización.

La investigación es de tipo cualitativa de corte descriptivo, y se emplea el método de estudio de caso, donde el caso está constituido por tres profesores de primero y segundo de primaria. Para recoger los datos se aplicó, a través de un cuestionario, una secuencia de actividades de *Early Algebra* que impliquen el proceso de generalización. Los datos se analizaron bajo un sistema de categorías, basado en el modelo MTSK.

Como resultado se encontró que los profesores ponen en acción conocimientos en cada uno de los dominios y subdominios del modelo MTSK, y que se establecen conexiones entre estos de tal manera que les permita llevar a cabo cada uno de los momentos del proceso de generalización. Sin embargo, dichos conocimientos se encuentran en un nivel elemental, por lo que la caracterización que aporta la investigación puede permitir crear espacios de formación para los profesores en este nivel.

Palabras clave: *Early Algebra*, procesos de generalización, pensamiento algebraico, MTSK.

ABSTRACT

Specialized literature affirms that the introduction of algebraic modes of thinking at an early stage in students, enables the possibility of developing deeper and more complex mathematical conceptions. Therefore, proposals such as Early Algebra, have been established, which propose taking advantage of the contents taught in the first grades to develop early algebraic thinking. However, this represents a challenge for teachers.

Research on primary school teachers indicates that there is a lack of preparation to implement initiatives like Early Algebra, derived from difficulties and challenges related to their algebraic knowledge. Some findings in our discipline expose the need for further exploration into algebraic knowledge and generalization aspects among primary school teachers.

Thus, the objective of this research is to characterize the knowledge put into action by first and second grade teachers when they are faced with Early Algebra activities that involve the generalization process. To carry out this study, the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model, the Early Algebra curriculum proposal, and the generalization process are used as a theoretical framework.

The research is of a qualitative type with descriptive approach, and the case study method is used, where the case is made up of three first and second primary school teachers. To collect the data, a sequence of Early Algebra activities involving the generalization process were applied through a questionnaire. The data were analyzed under a category system, based on the MTSK model.

As a result, it was found that teachers put knowledge into action in each of the domains and subdomains of the MTSK model, and that connections are established between them in such a way as to allow them to carry out each of the moments of the generalization process. However, this knowledge is at an elementary level, so the characterization provided by the research may allow the development of training opportunities for teachers at this level.

Keywords: Early Algebra, generalization, algebraic thinking, MTSK.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo se presenta la investigación que busca categorizar el conocimiento algebraico del profesor de primero y segundo de primaria con respecto al proceso de generalización tomando como referente el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés). El presente documento se encuentra organizado en seis capítulos.

El primer capítulo, planteamiento del problema, se expone *la motivación* que orientó esta investigación. Se presentan los *antecedentes* del estudio, donde se analizan las investigaciones que se han realizado sobre el conocimiento del profesor de primaria en el área de Álgebra, los procesos cognitivos, las concepciones y creencias con respecto al Álgebra, así como los procesos formativos. Finalmente, se realiza el *planteamiento formal de la investigación*, donde se expone la problemática de la investigación, el problema que se atenderá, la pregunta de investigación, los objetivos generales y particulares, la hipótesis de investigación y la justificación del trabajo.

El segundo capítulo, fundamentos teóricos, se explican los referentes que se toman en consideración para este trabajo. Se parte de exponer las ideas fundamentales del modelo MTSK, así mismo, se describe el modelo curricular sobre el que se centra este estudio, el *Earl y Algebra*; y finalmente se presenta aspectos fundamentales del proceso de generalización, resaltando su papel dentro del desarrollo del pensamiento algebraico.

El capítulo tres se dedica a la metodología, en éste se expone el tipo de investigación que se realizará, se describe el método que se empleará para realizarla, así como la técnica e instrumentos que se usarán para la recogida de información y análisis.

Mientras que en el cuarto capítulo se expone el análisis de los datos obtenidos a partir de la aplicación del instrumento de recogida de información. Se realiza un análisis detallado a través de cuatro acercamientos que permiten construir una lista de indicadores de conocimiento.

En el capítulo cinco, resultados y discusión, se presentan los indicadores de conocimientos puestos en acción por parte de los profesores, así como las conexiones que permitieron transitar por los momentos del proceso de generalización.

Finalmente, en el sexto y último capítulo se muestran las conclusiones de la investigación, las aportaciones realizadas, las limitaciones y futuras investigación, junto con una reflexión final desde el papel de profesora de matemáticas.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta en primera instancia la motivación del tema de estudio, en el cual se muestra de dónde nace el interés por la investigación. Posteriormente, se expone una síntesis del análisis de antecedentes, es decir se reportan los trabajos que se han realizado hasta el momento con respecto al tópico junto con una reflexión final en la que se considera lo que se puede realizar a partir del análisis de los trabajos desarrollados sobre el tema. Finalmente, se presentan el planteamiento formal del problema, donde se señala el objetivo general y particulares, la pregunta de investigación y la justificación del trabajo.

1.1. Motivación

Desde mi labor como profesora de nivel secundaria he sido testigo de las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando comienzan el estudio formal del Álgebra escolar y las emociones negativas que se pueden derivar. Del mismo modo, he notado los esfuerzos que los docentes realizamos para poder diseñar propuestas que apoyen a los estudiantes, las cuales en algunos casos ayudan a superar las dificultades; sin embargo, no en todos se obtienen resultados satisfactorios.

Derivado de lo anterior, desde los primeros años de labor docente nace mi interés por atender las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en el área de Álgebra. Lo cual me llevó a que como profesora diseñara propuestas y materiales que permitieran a los estudiantes apropiarse del conocimiento y lenguaje algebraico. Sin embargo, a pesar de este interés y esfuerzo, las dificultades persistieron provocando emociones negativas en ellos, tales como la frustración.

De esta manera, a lo largo de mi trayectoria docente, me han surgido preguntas tales como ¿por qué es complejo para los estudiantes el tránsito entre la Aritmética y el Álgebra? ¿los alumnos de primaria se encuentran preparados para enfrentar dicha transición? ¿el pensamiento algebraico se desarrolla hasta que aparecen las literales? ¿es hasta el nivel secundaria cuando los estudiantes pueden desarrollar su pensamiento algebraico? ¿qué oportunidades tienen los estudiantes en su Educación Básica para favorecer este tipo de pensamiento?

En el proceso por dar respuesta a tales interrogantes y, en suma, entender las dificultades que enfrentan los estudiantes en esta área, he explorado algunas propuestas que permitan apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico, entre las cuales me encuentro con el *Early Algebra*. El *Early Algebra* es un campo de investigación que apuesta por favorecer el pensamiento algebraico desde edades tempranas, de tal manera que el tránsito del Aritmética en primaria al Álgebra en secundaria no constituya un salto abrupto, sino que forme parte de un proceso continuo que sea formalizado en niveles más avanzados.

Muchos investigadores apuestan por la inserción del *Early Algebra* como una alternativa de solución ante la problemática que gira sobre el estudio del Álgebra de manera formal. Pues autores como Kaput (2008) y Radford (2015), afirman que ante las dificultades que enfrentan los estudiantes en el estudio del Álgebra se ha sugerido que una introducción progresiva al pensamiento algebraico desde edades tempranas tiene el potencial de mejorar nuestra comprensión del aprendizaje y la enseñanza conceptos algebraicos más avanzados en edades posteriores.

Así, desde que empiezo a leer, llama mi atención la oportunidad que representa aprovechar los espacios que brinda la educación primaria para favorecer el pensamiento algebraico temprano. Es común pensar, incluso como docentes, que el conocimiento y pensamiento algebraico se desarrolla hasta edades más avanzadas cuando aparecen las literales. Lo anterior derivado de asociarlo con la modelación mediante expresiones algebraicas.

De lo anterior surge la pregunta, ¿si no hay expresiones algebraicas no es posible desarrollar pensamiento algebraico?, el *Early Algebra* es un campo de investigación que nos brinda respuesta a preguntas como esta y que sorprende a quienes tenemos un acercamiento por primera vez, ya que desde esta postura es posible favorecer este tipo de pensamiento con tareas que no implican formular expresiones algebraicas, sino que tiene que ver con algo más profundo, tal como hacer generalizaciones y establecer relaciones funcionales sin necesidad de emplear lenguaje propiamente algebraico.

Por lo expuesto, mi acercamiento al *Early Algebra* me brindó una nueva forma de ver al Álgebra, notando los medios que permiten apoyar a los alumnos en su estudio. Sin embargo, surgen otras preguntas de importancia tales como, ¿los profesores de nivel primaria nos encontramos preparados para desarrollar una propuesta como *Early Algebra*? ¿qué preparación deberíamos tener para incluirla? ¿a qué dificultades nos enfrentamos los profesores que no fuimos formados bajo esa propuesta? o bien, ¿cómo tendríamos que prepararnos para incluir tareas de *Early Algebra* en nuestras clases?

Sabemos que para hacer posible todo cambio, primero debemos estar preparados los docentes, no sólo desde el conocimiento teórico, sino siendo parte del proceso. Es decir que, antes de poder implementar una propuesta debe ser analizada, reflexionada, interiorizada y finalmente aceptada por el profesor. Desde esta visión nace el interés por estudiar el conocimiento algebraico del profesor de matemáticas de nivel primaria en términos del *Early Algebra*.

1.2. Antecedentes

En este apartado se presenta el análisis de estudios previos relacionados con el foco de interés para esta investigación, con el propósito de analizar qué se ha realizado con respecto al tema, cómo lo han realizado, a qué han llegado y qué falta por hacer.

Para su presentación este reporte se organizó en cuatro categorías: conocimiento del profesor, procesos cognitivos del profesor, concepciones y creencias del profesor y finalmente, procesos formativos del profesorado.

1.2.1. Conocimiento del profesor

Dado que el foco del presente trabajo es el conocimiento del profesor de matemáticas de nivel primaria, en el siguiente apartado se muestran algunas investigaciones realizadas y los hallazgos que son relevantes para este estudio.

Branco y Ponte (2012), realizaron un experimento didáctico en el que, entre otros aspectos, desarrollaron una comprensión del conocimiento que el futuro maestro de primaria necesita para promover el aprendizaje del Álgebra. Para esto llevaron a cabo un estudio de caso de una futura maestra dentro del contexto de una experiencia didáctica bajo los lineamientos para la formación inicial de docentes para educación preescolar y básica.

El estudio involucró el desarrollo de siete tareas sobre temas como: relaciones, patrones, secuencias, funciones y modelado, su relación mutua, entre otros. Cada tarea tuvo como objetivo profundizar en aspectos del conocimiento algebraico y brindar oportunidades de discusión para desarrollar el conocimiento didáctico de los participantes.

Dentro de las reflexiones que los autores realizan sobre los resultados, y que son importantes para este estudio, se rescata el papel que jugó el enfoque en las relaciones y la búsqueda de generalizaciones para una comprensión más profunda de los procedimientos que la profesora ya conocía y que a menudo usaba de forma mecanizada. Lo anterior, de acuerdo con los autores, muestra una evolución de su razonamiento. Estos hallazgos pueden sugerir que el conocimiento sobre generalización apoyaría en el desarrollo de la comprensión de contenido algebraico para promover su aprendizaje.

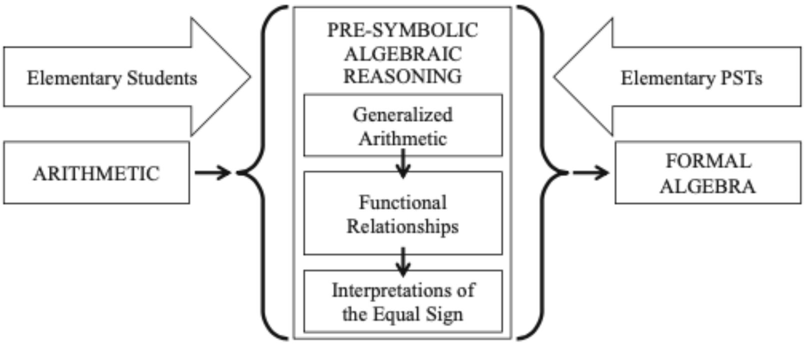
Por otro lado, el trabajo con los temas centrales del experimento permitió que la profesora desarrollara una comprensión del conocimiento que el maestro necesita para promover el aprendizaje de Álgebra, tal como la exploración de relaciones. Mientras que el análisis sobre tareas no rutinarias la llevó a destacar el papel que éstas juegan en la comprensión algebraica de los estudiantes y promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria.

Lo expuesto en este estudio da cuenta de la importancia de profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas de nivel primaria, así como en el impacto que tiene desarrollar espacios donde el profesorado pueda tener un acercamiento distinto con el Álgebra al que han tenido como estudiantes a lo largo de su vida académica. Lo anterior a fin de diseñar y promover este tipo acercamiento para favorecer conocimientos algebraicos centrales y procesos de pensamiento, tal como la generalización, que apoyen en la comprensión de los temas.

Hohensee (2017), por su parte, exploró el conocimiento que necesita el profesor para promover el pensamiento algebraico en edades tempranas, examinando las ideas y desafíos que experimentan los futuros profesores de Matemáticas al explorar el razonamiento algebraico temprano, para lo cual impartió un curso de contenido de Álgebra Temprana en una Universidad del Atlántico en EE. UU.

Figura 1

Marco conceptual para la transición de la Aritmética al Álgebra



Nota. Tomado de "Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra" (p. 233), por C. Hohensee, 2017, Journal of Mathematics Teacher Education, 20.

Para desarrollar su trabajo, consideró el marco conceptual centrado en los tres grandes temas: aritmética generalizada, relaciones funcionales e interpretación relacional del signo igual; que de acuerdo con investigaciones constituyen el núcleo del *Early Algebra* (p. ej., Ellis, 2011; McNeil et al., 2006; Radford, 2012, citados en Hohensee, 2017).

En la Figura 1 se presenta el marco conceptual referencial citado. En el lado izquierdo del marco Hohensee (2017) representó la transición que los estudiantes de primaria deberán hacer de la Aritmética al Álgebra inicial. Mientras que del lado derecho del marco representó la transición que los futuros profesores tendrán que hacer desde el Álgebra formal de regreso al Álgebra inicial.

Hohensee (2017) retoma el marco conceptual asumiendo que su implicación directa es que los futuros profesores están pasando por un proceso similar al de los estudiantes de primaria (aunque al revés). El autor sostiene que la formación en Álgebra temprana constituye un cambio significativo y desafiante de pensamiento, similar al que experimentan los alumnos de primaria, pero con la diferencia de que procede del conocimiento formal del Álgebra y no del conocimiento aritmético.

Por lo tanto, en su estudio enfrenta a los futuros profesores a la resolución de actividades de razonamiento pre-simbólico, donde se pueden llevar a cabo representaciones como diagramas informales y rectas numéricas para representar incógnitas, variables, expresiones algebraicas, funciones y ecuaciones. Para recoger los datos, se hicieron videograbaciones de las sesiones del curso y además se consideraron las reflexiones y producciones que generaron.

Entre los resultados cuyo interés trasciende para esta investigación se destacan que los futuros profesores presentan desafíos conceptuales desde la perspectiva funcional, tal como identificar las relaciones contenidas en las expresiones algebraicas; y desde el razonamiento algebraico pre-simbólico, al tener una comprensión enraizada del Álgebra formal que imposibilita un trabajo desde lo no simbólico.

Con base en este último desafío, el autor sostiene la importancia de lograr poner entre paréntesis el Álgebra formal para trabajar en el desarrollo de formas informales de razonamiento, ya que lograrlo ayuda a los futuros maestros a "[reaprender] Matemáticas para poder enseñarlas de manera diferente a como las aprendieron" (Nicol 2006, citado en Hohensee, 2017, p.21).

En suma, el trabajo de Hohensee (2017) deja de manifiesto que "la exploración del Álgebra temprana no es trivial para los maestros en formación y que es preciso prepararlos adecuadamente para su enseñanza" (p. 1), por lo que sugiere proporcionar a los futuros profesores más ejemplos del razonamiento de los estudiantes de primaria sobre ideas algebraicas.

Así, el estudio de Hohensee (2017) deja en evidencia la importancia de profundizar y atender los desafíos a los que se enfrentan los profesores de primaria al re-aprender Álgebra, ya que, a diferencia de los estudiantes, éstos cuentan con un conocimiento que puede apoyar u obstaculizar el desarrollo de un razonamiento algebraico pre-simbólico que les permita ver al Álgebra más allá del simbolismo.

Continuando con la investigación del conocimiento algebraico de los profesores de nivel primaria, Aké (2021) realizó un estudio con un grupo de profesores en formación de este nivel para analizar el carácter algebraico de su conocimiento matemático. Para ello utilizó las propuestas teóricas sobre el conocimiento didáctico-matemático y los niveles de algebrización que permitieron, a partir de la aplicación de un cuestionario con seis tareas, describir y analizar los conocimientos que ponen en juego al resolverlas.

Entre los resultados de esta investigación se destaca que, a pesar de que los profesores resolvieron las tareas planteadas usando un conocimiento común, entendido como el contenido matemático *per se*, el fundamento matemático empleado no es el apropiado para el desarrollo del pensamiento algebraico; lo que da cuenta de un conocimiento algebraico limitado.

Por su parte en lo respecta a la generalización, los futuros profesores no manifestaron el uso de simbolismo para articular una regla general; sin embargo, menos de la mitad fueron capaces de articular una regla de manera verbal de forma correcta, apoyándose de un lenguaje icónico.

Los resultados de esta investigación señalan que los futuros profesores presentan dificultades al resolver las tareas utilizando un conocimiento algebraico consolidado, ya que poseen conocimientos limitados sobre el Álgebra y requieren fortalecer una comprensión del sentido de uso del carácter algebraico y no sólo la manipulación simbólica.

Desde esta perspectiva, Aké (2021) señala que es “necesario proporcionar a los futuros maestros escenarios en donde experimenten procesos de desarrollo para el pensamiento algebraico relacionados con la generalización de las propiedades estructurales y relaciones funcionales que subyacen en las ideas matemáticas” (p. 15). Enfatiza la importancia de que dichos escenarios focalicen “aspectos de generalización de propiedades y relaciones funcionales más que en la reproducción de procedimientos” (p. 32).

En general Aké (2021), sostiene que la integración del pensamiento algebraico en la educación primaria “demanda por parte de los maestros el desarrollo de un conocimiento que les permita construir una visión para reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas como promover el pensamiento algebraico de los niños” (p.15).

Continuando con la revisión de la investigación, Zapatera y Quevedo (2021) evaluaron el conocimiento algebraico de estudiantes para maestro al inicio de su formación, con el objetivo de analizar si éste “es suficiente para detectar y promover el pensamiento algebraico en los alumnos de Educación Primaria” (p. 2). Para ello, los futuros docentes debían proponer tareas que favorecieran el desarrollo del pensamiento algebraico en los alumnos de primaria tomando como base dos situaciones abiertas.

Como resultados, obtuvieron que “la mayoría de los participantes diseñaron tareas en las que asignaban valores específicos a los indeterminados y los resolvían aritméticamente” (p. 1). “Muchos participantes modificaron las oraciones para que a los estudiantes les resultara más sencillo resolverlo desde lo numérico, ignorando la naturaleza algebraica de la Aritmética e impidiendo que los estudiantes establecieran conexiones entre Aritmética y Álgebra” (p. 11).

Los participantes transformaron las situaciones en problemas cerrados de solución única que limitaron la potencialidad que éstas pueden tener para promover el pensamiento algebraico a través de la generalización y representación de relaciones y funciones.

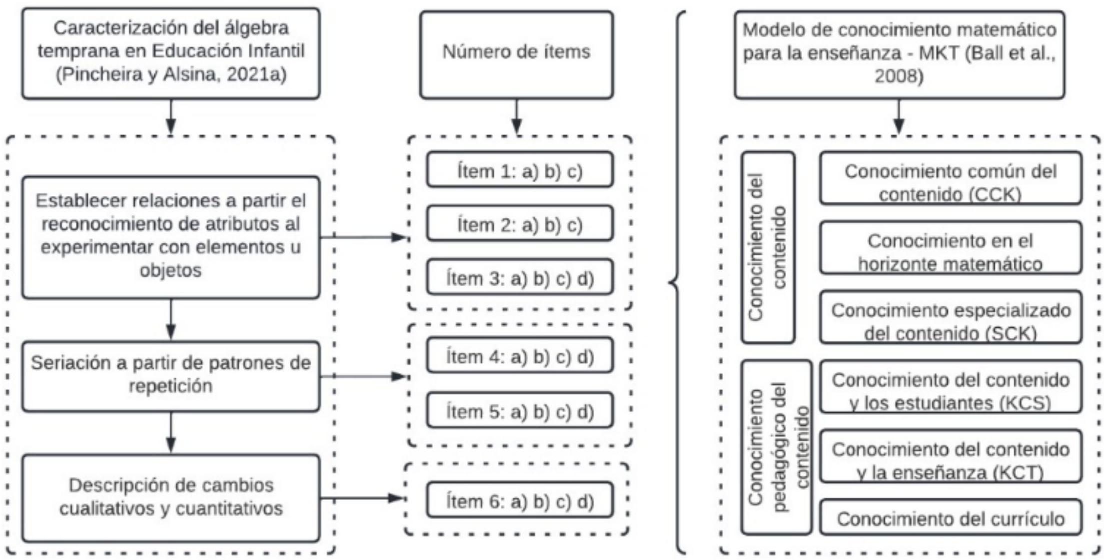
Los autores resaltan que el conocimiento algebraico de los participantes es insuficiente, por lo que para fortalecerlo “es necesario incluir en su proceso de formación los programas y experiencias que les permitan diseñar tareas para detectar y promover el pensamiento algebraico en sus futuros alumnos” (p.1). Para ello proponen secuencias de tareas, que pueden servir como punto de partida para iniciar programas y experiencias formativas que favorezcan una “algebrización” del currículo mediante el reconocimiento de relaciones funcionales, su generalización y sus representaciones.

Por su parte, ante la necesidad de examinar el conocimiento del profesor en términos de Álgebra temprana, autores como Pincheira y Alsina (2022) se han dado a la tarea de dirigir investigaciones hacia la construcción de instrumentos que permitan valorar esta variable. De forma específica, estos autores construyeron y validaron un instrumento para evaluar el conocimiento del futuro profesorado de Educación Infantil para enseñar Álgebra Temprana desde el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*.

El proceso estuvo constituido por cinco fases: 1) revisión de la literatura sobre el conocimiento del profesorado para enseñar Matemáticas desde el modelo del *MKT* y la enseñanza del Álgebra Temprana; 2) análisis del tratamiento que se otorga al Álgebra Temprana en el currículo y los libros de texto; 3) construcción de una versión inicial del instrumento; 4) validación del instrumento realizada por expertos y una prueba piloto; y 5) ajustes y construcción de la versión final del instrumento.

Figura 2

Estructura del cuestionario MKT-Álgebra Temprana (3-6).



Nota. Tomado de "Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil" (p.158), por N. Picheira y Á. Alsina, 2022, Revista de Investigación en Educación, 20(2).

Como resultado obtuvieron un cuestionario denominado MKT-Álgebra Temprana (3-6). Éste se encuentra conformado por seis reactivos de repuesta abierta donde se abordan temas que caracterizan al Álgebra Temprana en Educación Infantil con el fin de examinar el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento Didáctica del Contenido (Ball *et al*., 2008, citado en Pincheira y Alsina, 2022), como se muestra en la figura 2.

De este estudio se rescata por un lado la metodología empleada para la construcción del instrumento, ya que permite retomar las fases para el diseño de los instrumentos que se elaborarán en esta propuesta, con las adaptaciones que correspondan de acuerdo con el objetivo de este estudio. Así como, los resultados obtenidos de la aplicación piloto del instrumento.

Con respecto a los resultados de la aplicación piloto, se revela que los profesores presentan limitaciones en formación al enfrentarse a las situaciones de enseñanza en los dominios del *MKT*. Específicamente en lo que respecta al Conocimiento del Contenido, los profesores presentan dificultades en el subdominio, Conocimiento del Horizonte matemático, ya que el 80% de los participantes no fueron capaces de relacionar el contenido matemático abordado en el ítem con conceptos más avanzados dentro del currículo escolar.

De igual forma presentaron dificultades con el subdominio, Conocimiento Especializado del Contenido, ya que solo el 40% pudo identificar los contenidos matemáticos implícitos en la solución de las tareas. Mientras que, dentro del dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido, los participantes presentaron dificultades en el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, pues ninguno fue capaz de identificar los conocimientos necesarios para construir una serie, la comprensión del operador lógico y la representación del cambio cualitativo, así como describir las dificultades relacionada con este tipo de tareas.

De esta manera el estudio realizado por los autores deja en evidencia las limitaciones que presentan los profesores en formación al enfrentarse a situaciones de enseñanza que demandan conocimiento de contenido y conocimiento didáctico para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en escolares de edades tempranas.

Sin embargo, los autores señalan que, de acuerdo con la valoración del instrumento, éste puede servir de orientación para apoyar el proceso de formación del profesorado de Educación Infantil sobre Álgebra Temprana. Por lo que diseñar un instrumento tomando en cuenta esta experiencia puede resultar útil para los fines de este estudio.

De acuerdo con lo revisado en esta categoría se encuentra que el conocimiento de los futuros profesores de matemáticas de nivel primaria sobre temas centrales del Álgebra, tales como relaciones funcionales, generalización, patrones; no son suficientes para favorecer el pensamiento algebraico en edades tempranas. De acuerdo con lo revisado, estos conocimientos muchas veces se centran en la manipulación simbólica, que incluso puede ser mecanizada y carente de sentido, lo que dificulta la comprensión del carácter algebraico de las tareas matemáticas.

De este análisis es posible rescatar la necesidad de profundizar en lo que los profesores conocen sobre el Álgebra y cómo los ponen en juego, a fin de comprender por qué estos conocimientos no son suficiente o apropiados para promover el pensamiento algebraico de los estudiantes. También se resalta la necesidad de fortalecer su preparación a través de la creación de espacios en los que se pueda analizar y discutir tareas que involucren procesos de desarrollo del pensamiento algebraico como la generalización de propiedades para enriquecer la comprensión del conocimiento algebraico.

1.2.2. Procesos cognitivos del profesor.

Otros estudios centrados en el profesor han examinado su capacidad para analizar el proceso de pensamiento algebraico de los estudiantes, así como el propio desarrollo de su pensamiento en términos de razonamiento y procesos de generalización, entendido este último como las acciones que le permiten identificar los elementos comunes, ampliar el razonamiento más allá del rango y obtener resultados más amplios que los casos particulares, a fin de generar una expresión de generalidad (Ellis, 2007; Kaput, 1999).

Investigadores como Trujillo et al. (2010) han analizado los procesos de generalización que llevan a cabo los futuros profesores. De forma particular, las autoras realizaron un estudio de casos, con cuatro futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada, con el objetivo de analizar el proceso de generalización que realizan cuando trabajan expresiones aritméticas que permiten la generalización como producto, es decir la expresión.

Para recoger la información de esta investigación, los estudiantes de profesorado resolvieron cuatro tareas escritas cuyas respuestas fueron profundizadas a través de una entrevista semi-estructurada.

Para el análisis de los datos las autoras utilizaron la taxonomía de Ellis (2007), la cual cuenta con diferentes niveles de generalización. Esta taxonomía distingue la actividad que realizan los estudiantes cuando generalizan, clasificándolas en acciones para la generalización y generalizaciones reflejadas, que son los enunciados finales de generalización (Trujillo et al., 2010). Para la investigación que ellas realizaron emplearon la segunda parte de la taxonomía a fin de analizar y clasificar los enunciados finales generados por los estudiantes.

Los resultados de este estudio reportan que los futuros profesores tuvieron poca dificultad para describir un patrón de forma verbal e incluso, en algunas ocasiones hicieron predicciones basadas en las relaciones identificadas de un patrón. Sin embargo, no fueron capaces de formular una descripción algebraica formal de las expresiones aritméticas propuestas, mostrando cierta dificultad para expresar por medio de simbolismos algebraico las relaciones observadas.

Lo anterior coincide con los hallazgos de otros autores como Zazkis y Liljedahl (2002, citados en Trujillo et al., 2010), quienes sostienen que existe "un vacío significativo entre reconocer un patrón y ser capaz de expresarlo algebraicamente" (p. 545).

A pesar de lo anterior, las autoras observaron que cuando se establece un diálogo guiado con los futuros profesores, éstos son capaces de construir correctamente una expresión algebraica. De acuerdo con las autoras, lo expuesto deja de manifiesto que, si los futuros profesores trabajan tareas de este tipo, su formación puede progresar hacia el desarrollo de generalizaciones.

Continuando con los trabajos que han examinado la capacidad de los profesores con respecto a los procesos cognitivos, Tanisli y Kose (2013) evaluaron la capacidad de los futuros profesores de Matemáticas de primaria para discutir e investigar el proceso de pensamiento de los estudiantes sobre los conceptos de variable, igualdad y ecuación. Para ello emplearon cuestionarios con preguntas abiertas y entrevistas clínicas.

Los datos fueron analizados cualitativamente de acuerdo con las siguientes categorías (1) hacer preguntas para identificar los errores de los estudiantes; (2) discutir el proceso de pensamiento de los estudiantes; (3) predecir los errores de los estudiantes; (4) conceptos erróneos, dificultades y el lenguaje de las materias matemáticas de los maestros en formación que utilizan.

Los resultados de este estudio mostraron que, en general, los conocimientos de los futuros maestros eran insuficientes y presentaban errores en conceptos tales como variable, igualdad y ecuación; lo que revela la necesidad de mejorar su conocimiento en conceptos como los citados.

Otro de los hallazgos relevantes de este estudio es que los conocimientos insuficientes sobre Álgebra impidieron que los futuros profesores identificaran el proceso de pensamiento de los estudiantes y los conceptos erróneos de los mismos; lo que llevó a que propusieran explicaciones irrelevantes o insignificantes cuando no podían entender los pensamientos de los estudiantes o explicar las razones de esos pensamientos.

En suma, este estudio revela que poder interpretar el conocimiento de los estudiantes está directamente relacionado con el conocimiento que el profesor tenga sobre la materia y los conceptos erróneos. Es decir, para comprender y apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes los profesores deben contar con conocimientos algebraicos sólidos.

Continuando con el análisis de las investigaciones en esta clase, Zapatera y Callejo (2013) caracterizaron, en Estudiantes Para Maestro (EPM), "grados de desarrollo de la competencia docente 'mirar con sentido' el pensamiento matemático de alumnos de primaria, de forma específica el proceso de generalización, identificando el tipo de discurso que emplean" (p. 535).

El proceso de generalización en esta investigación se vinculó a tareas en las que se dan en forma gráfica los primeros términos de una sucesión y se pide: (a) continuar la sucesión; (b) el número de elementos que componen las figuras de términos lejanos; (c) identificar la regla general; (d) identificar la posición de una figura dado el número de elementos.

Zapatera y Callejo (2013) reportan que "los EPM tienen dificultades para interpretar el pensamiento matemático de los alumnos sobre el desarrollo del proceso de generalización" (p. 542). El estudio revela que algunos EPM no fueron capaces de distinguir entre los alumnos que coordinaban las estructuras numérica y espacial y utilizaba una relación funcional para describir la regla general y los que además sabían invertir la relación funcional.

Lo anterior indica que les ha resultado difícil describir el proceso de generalización de los alumnos de primaria usando elementos matemáticos en la resolución de las tareas propuestas. Este hecho puede encontrarse ligado al propio desarrollo del proceso de generalización de los profesores, ya que este podría permitirle ver acciones que se encuentran involucradas en el mismo tales como, explorar, formular, revisar y validar conjeturas, identificar estructuras, como lo mencionan algunos autores (Cañadas y Castro, 2007; Blanton, 2008; Pinto y Cañadas, 2018); y no centrarse únicamente en la generalización como producto, es decir la expresión de generalidad.

En este mismo sentido Radford (2010) sostiene que el proceso de generalización se produce cuando es posible identificar una característica común sobre los elementos de una secuencia de modo que se puede brindar una expresión que represente a todos los términos de ésta. Por lo que es importante que los profesores reconozcan el proceso, ya que le puede permitir acompañar el desarrollo del pensamiento algebraico del estudiante.

Por lo tanto, en el estudio de Zapatera y Callejo (2013) dejan de manifiesto la necesidad de que los EPM tomen consciencia explícita del proceso de generalización y los elementos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas de este tipo.

Por su parte, Castro y Godino (2014) examinaron "la comprensión sobre el razonamiento algebraico elemental exhibido por futuros profesores cuando deben proponer tareas algebraicas elementales a los alumnos de primaria" (p. 148). Se usaron diversas fuentes de datos, tales como: solución escrita de tareas, identificación escrita de elementos algebraicos, conversaciones informales, borradores iniciales de unidades didácticas y versiones finales, audios y videos de las sesiones de trabajo.

Reportan que las tareas algebraicas que proponen los maestros en formación se sitúaan en dos grandes temas: número y operaciones, y Geometría; siendo el primero donde se concentra el 80% de las tareas.

De acuerdo con Castro y Godino (2014) lo anterior sugiere "que los futuros profesores consideran los números y sus operaciones como base del pensamiento algebraico" (p. 156). Para estos autores a pesar de que las bases sobre un conocimiento numérico son importantes y necesarias en la transición de la Aritmética al Álgebra, el uso predominante o casi exclusivo de lo numérico puede constituir un obstáculo para resolver algunas tareas algebraicas.

Por otro lado, lo resultados de este estudio revelan que los docentes presentan dificultades para promover actividades relacionadas con la generalización (Castro y Godino, 2014). Los autores señalan que los futuros profesores con los que se trabajó "no reconocen espontáneamente las tareas de generalización" (Castro y Godino, 2014, p. 154) y que esto se encuentra relacionado con la concepción que tienen del pensamiento algebraico donde ligan el Álgebra al uso de letras.

De este estudio también se rescata el hecho de que al finalizar esta experiencia se observó que los futuros profesores ampliaron su comprensión sobre el pensamiento algebraico elemental, lo que les permitió reconocer y cuestionar algunas características algebraicas de las actividades matemáticas, lo que sugiere que contar con este tipo de espacios de formación fortalece el desarrollo del pensamiento algebraico y permite que los profesores transciendan del conocimiento de procedimientos al razonamiento.

Godino et al. (2014) analizaron las respuestas de 140 estudiantes de magisterio a un problema algebraico, en el contexto de una asignatura que contempla su formación didáctico-matemática; con el objetivo de reconocer características algebraicas en la resolución de tareas matemáticas a través de un modelo en el que se diferencian lo siguientes niveles de razonamiento algebraico elemental.

- Nivel 0 (Ausencia de razonamiento algebraico). Intervienen números particulares, las reglas que definen las situaciones de uso de tales conceptos no se hacen explícitas en la realización de la tarea.

- Nivel 1 (Incipiente de algebrización). Establece una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones.
- Nivel 2 (Intermedio de algebrización). Las variables son expresadas con lenguaje simbólico-literal.
- Nivel consolidado de algebrización. Se general objetos intensivos representados de manera simbólica-literal.

Los resultados de esta investigación señalan que el 63% de los estudiantes se encuentran en un nivel 0 de algebrización frente a 11% que se encuentra en un nivel consolidado. Por su parte, aunque un porcentaje elevado de los estudiantes muestran un cierto anclaje en el uso del cálculo aritmético, otros estudiantes sí logran realizar una modelización algebraica.

Por otro lado, los investigadores sostienen que exponer a los futuros profesores a tareas matemáticas clasificadas dentro de los distintos niveles de algebrización puede orientar su acción para impulsar la progresión del pensamiento matemático del estudiante hacia niveles progresivos de generalización, así como eficacia representacional y operatoria.

En síntesis, los hallazgos de las investigaciones expuestas muestran que en general los futuros profesores presentan dificultades en términos de pensamiento y razonamiento algebraico elemental y proceso de generalización, lo que no se traduce únicamente en dificultades para formular expresiones algebraicas que generalicen una situación, sino que le impide identificar e interpretar el proceso de pensamiento de los estudiantes, así como los conceptos erróneos de los mismos. Lo que impacta en su capacidad para poder potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes.

De acuerdo con los estudios realizados en el campo de *Early Algebra*, “los estudiantes de los primeros cursos pueden desarrollar tareas que aborden funciones y que más de los estudiantes de lo que se podría esperar son capaces de generalizar” (e.g., Carraher et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2021, citados en Narváez, et al, 2023); por lo que con base en los resultados de las investigaciones aquí presentadas se deja en evidencia la necesidad de profundizar en el conocimiento del profesor en términos de procesos de generalización, a fin de favorecer su propio pensamiento algebraico y se encuentre en condiciones de promoverlo en su aula.

1.2.3. Concepciones y creencias del profesor

Investigaciones realizadas en torno al profesor examinan las concepciones y creencias que los profesores tienen con respecto al Álgebra, ya que se ha encontrado que éstas influyen en sus prácticas de instrucción (Stephens, 2008).

Al respecto, Stephens (2008), examinó las concepciones sobre el Álgebra de 30 futuros maestros de primaria y sus análisis de tareas diseñadas para involucrar a los estudiantes en el pensamiento relacional o una comprensión profunda del signo igual. Para ello aplicó cuestionarios donde recogió las concepciones de los futuros profesores, así como entrevistas donde analizó cinco tareas sobre pensamiento relacional resueltas por algunos estudiantes.

De acuerdo con los resultados de este estudio, se identificó que las concepciones que los profesores de primaria tienen sobre el Álgebra como materia de estudio son bastante limitadas ya que la equiparan únicamente con la manipulación de símbolos.

De acuerdo con Stephens (2008), “muy pocos identificaron otras formas de razonamiento, en particular, el pensamiento relacional, con la etiqueta de Álgebra” (p.33). El autor reporta que incluso un amplio porcentaje de los participantes calificaban más como algebraicas las respuestas de los estudiantes donde había una manipulación de símbolos que aquellas que demostraban un pensamiento relacional pero no se hacía uso del simbolismo.

De acuerdo con el estudio, uno de los criterios de los profesores para calificar problemas como algebraicos estaba relacionado con la presencia de una variable o letra; algo similar a lo que ocurría al evaluar las respuestas de los estudiantes. Stephens (2008) señala que “cuando se mostró evidencia de pensamiento algebraico en las respuestas de los estudiantes, los participantes a menudo admiraron el pensamiento, pero lo etiquetaron como ‘creativo’ o ‘solo razonamiento’ en lugar de Álgebra” (p. 44).

Stephens (2008) señala que “los maestros en formación indicaron que pensaban en el Álgebra como un ‘método’ o algo que uno ‘hace’ en lugar de una forma de pensar” (p. 45). Por lo que los hallazgos dejan de manifiesto la importancia de ayudar a los maestros en formación a reconocer cómo las estrategias que evidencian pensamiento algebraico se conectan con el Álgebra. De acuerdo con el autor, tales conexiones podrían ayudar a los profesores a pensar en el Álgebra como una forma de pensar en lugar de una lista de procedimientos a seguir.

Por otro lado, Castro y Godino (2011) recuperaron las creencias sobre el razonamiento algebraico elemental manifestado por un maestro en formación mientras valoraba una tarea algebraica resuelta por dos niños de escuela elemental. Para ello, se retomó el marco del curso “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria” de la Universidad de Granada donde se elaboró una unidad didáctica sobre el razonamiento algebraico elemental, y se aprovechó el espacio para discutir y valorar ejercicios resueltos por los niños de sexto grado, de una escuela de Granada.

Los resultados de esta investigación, muestran que “la concepción manifestada por los maestros en relación con el ‘Álgebra’ evidencia una tendencia a considerar el razonamiento algebraico elemental como ‘un debilitamiento’ del razonamiento algebraico del currículo de la secundaria” (Castro y Godino, 2011, p. 8). Así como que, los maestros son capaces de enseñar Álgebra en la escuela elemental, sin embargo, requiere ampliar su concepción acerca de qué es el razonamiento algebraico en la escuela primaria.

Por otro lado, los autoes señalan que “parece que no existe correspondencia entre las competencias algebraicas exhibidas por los niños, de los cuales analizaron sus producciones, y la competencia del futuro maestro para reconocer y promover el razonamiento algebraico manifestado en ellos" (Castro y Godino, 2011, p. 8).

Cambiar las creencias de los maestros es una tarea difícil que demanda un esfuerzo (Wubbels, Korthagen y Broekman, 1997, citados en Castro y Godino, 2011) por lo que los autores consideran que "se requiere incrementar las investigaciones en el aula sobre la formación de maestros, y vincular las prácticas de análisis didáctico realizadas por maestros en formación con las prácticas matemáticas realizadas por niños de escuela elemental" (Castro y Godino, 2011, p.8).

En general, las investigaciones revisadas en torno a las concepciones de Álgebra que manifiestan los profesores muestran que éstas son limitadas y se cierran únicamente a relacionar el conocimiento algebraico con la manipulación de símbolos, dejando de considerarlo también como un pensamiento.

Lo anterior es un elemento de atención ya que de acuerdo con los estudios revisados las concepciones que los profesores manifiestan con respecto a Álgebra se encuentran directamente relacionadas con su capacidad para reconocer el razonamiento y/o competencias algebraicas de los estudiantes y lograr potenciarlas a fin de favorecerlos y consolidarlos.

1.2.4. Procesos formativos del profesorado

Llevar a cabo una propuesta curricular como *Early Algebra*, demanda un cambio profundo en la perspectiva de los maestros, por lo que ofrecer espacios de formación en este aspecto resulta de gran importancia. Es por ello por lo que algunas investigaciones que se han realizado en torno al profesor ante esta propuesta se centran en sus procesos formativos y las características que los programas de formación deberían tener.

Al respecto, Blanton y Kaput (2005), realizaron un estudio con maestros en función que atendían los grados de 2 a 6 de primaria y eran parte de un proyecto de Desarrollo Profesional (DP). El objetivo de esta investigación era "algebrizar" los materiales curriculares que empleaban en su instrucción y apoyar a identificar oportunidades para favorecer la generalización.

Los resultados de este trabajo informan que la experiencia que tuvieron los profesores incrementó el uso de actividades que favorecen el pensamiento algebraico. Sin embargo, aún existió una tendencia a emplear las actividades procedimentales marcadas en los textos escolares, lo que por parte de los autores sugieren concepciones limitadas sobre Álgebra.

Blanton y Kaput (2005) asocian la falta de cambios importantes, en algunos docentes, a la fragilidad en su conocimiento matemático, por lo que concluyen que un cambio sustancial requiere más espacios de DP que ayuden a los profesores a ir más allá en sus prácticas pedagógicas.

Por su parte, Castro et al. (2011) informan los resultados de un estudio descriptivo interpretativo sobre el análisis epistémico realizado por un grupo de futuros profesores de primaria cuando proponen, resuelven y discuten tareas matemáticas que presentan rasgos algebraicos.

Para llevar a cabo el estudio, se recuperó la elaboración que realizaron de una "unidad didáctica" sobre el pensamiento algebraico elemental en el marco de un curso de currículo de Matemáticas en Educación Primaria; de forma específica los análisis que realizaron de las tareas incluidas en el desarrollo de las secuencias de actividades a través de la herramienta denominada Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados "GROS" (Godino, et al., 2008, citados en Castro, et al., 2011).

Para obtener comprensión del proceso que experimentaron los estudiantes se emplearon instrumentos tales como, conversaciones informales, soluciones escritas, identificación escrita de elementos algebraico, audio de las discusiones y de la entrevista, así como videos de la presentación de sus unidades didácticas.

Los autores reportaron que los participantes evidencian cierta competencia de análisis epistémico que permitió el reconocimiento específico de algunas características propias del razonamiento algebraico elemental. Ante lo anterior, sostienen que la puesta en práctica de este tipo de análisis permitió que el grupo efectuara un reconocimiento más específico de algunas características propias del pensamiento algebraico elemental.

Por lo anterior, afirman que los maestros pueden promover el razonamiento algebraico elemental, siempre que cuenten con oportunidades para aprender a reconocer e incentivar el razonamiento algebraico manifestado por los niños, lo que puede favorecer el acceso de los estudiantes a niveles superiores de formación matemática.

De lo anterior, resaltan la importancia de formación del profesorado ya que señalan que, particularmente, las competencias algebraicas espontáneas del estudiantado se pueden ver afectadas por la formación del profesor, lo cual puede ayudar al desarrollo del pensamiento algebraico del niño o, por el contrario, si la formación del profesorado es deficiente, obstaculizarla.

Malara y Navarra (2018), por su parte, trabajaron un proyecto concebido como un sistema integrado de formación de docentes e innovación en el aula, con el objetivo de renovar la enseñanza de la Aritmética en una perspectiva de *Early Algebra*, guiando a los alumnos hacia el descubrimiento de letras para expresar generalidades.

Centraron su análisis en algunos Puntos Teóricos clave (KP, por sus siglas en inglés) y en los principales Constructos del Lenguaje (LC, por sus siglas en inglés). A través de extractos de discusiones en clase, mostraron la incidencia de KP y LC en la construcción progresiva y el refinamiento del pensamiento algebraico temprano de los alumnos.

Su estudio revela que, para favorecer el pensamiento algebraico en Educación Primaria, los docentes deben tener experiencia en aspectos relacionados con cómo ayudar a los alumnos a llevar a cabo la transición de sus representaciones a los tipos particulares de estructuras del lenguaje natural, diagramas y la propia notación algebraica. Sin embargo, los profesores deben se conscientes de qué Aritmética y qué Álgebra ha de considerarse al introducir el desarrollo del pensamiento algebraico en la Educación Primaria.

La experiencia de esta investigación muestra que cambiar la enseñanza hacia la perspectiva del *Early Algebra* requiere una conversión del profesionalismo de los profesores, el cual es un proceso lento que debe ser apoyado a través de programas de desarrollo apropiados.

Finalmente, Ferreira et al. (2022) analizaron el diseño una situación de Desarrollo Profesional para comprender cómo este proceso formativo ayuda a los maestros a entender qué significa el pensamiento algebraico y cómo trabajarlo en edades tempranas.

De manera específica, el estudio estuvo centrado en que los profesores identificaran evidencias del carácter algebraico en las prácticas matemáticas de alumnos, el reconocimiento de la generalización, la interpretación y significación de las justificaciones de los alumnos y la propuesta de acciones para fomentar la generalización.

Para ello el diseño de la situación se realizó mediante el modelo de Oportunidades de Aprendizaje Profesional para Docentes (PLOT, por sus siglas en inglés) con el objetivo de promover oportunidades de aprendizaje profesional para los docentes en los primeros años.

Los resultados de este estudio sugieren que las tareas de aprendizaje profesional y las interacciones discursivas entre los participantes (principios del modelo PLOT) contribuyen a la comprensión del significado del pensamiento algebraico y cómo promoverlo en los estudiantes de primaria. Fomentar discusiones de carácter matemático y didáctico fortalecen las tareas de aprendizaje profesional en los docentes.

Los estudios reportados en esta última categoría resaltan la importancia de formación del profesorado en términos de *Early Algebra*, dejan de manifiesto que ofrecer este tipo de espacios puede apoyar a los profesores a aprender a reconocer e incentivar el razonamiento algebraico, comprender qué significa pensar algebraicamente y cómo trabajarlo. En suma, la formación profesional en *Early Algebra*, fortalece su experiencia para ayudar a los estudiantes a fortalecer sus competencias algebraicas.

1.2.5. Reflexión

A manera de reflexión, con la inserción de la propuesta curricular de *Early Algebra,* la mirada se ha dirigido hacia el profesor, ya que para lograr el éxito de una nueva propuesta curricular es necesario que los docentes cuenten con elementos necesarios y suficientes para ponerla en marcha. Es por ello por lo que, desde su inserción en algunos modelos educativos, se ha dirigido la investigación en torno al conocimiento del profesor, su preparación y los procesos que enfrenta para analizar e interpretar situaciones de *Early Algebra*.

De la revisión realizada es posible observar que la investigación sobre la formación del profesorado en *Early Algebra* se ha centrado en el estudio con futuros profesores y algunas dirigidas a profesores en activo; lo anterior puede derivarse de que, al ser una propuesta con algunas décadas una de las preocupaciones latentes gira en torno a cómo preparar a los futuros docentes para poder desarrollarla con éxito. De esta manera se produce que los estudios que se han realizado buscan identificar los aspectos que es necesario trabajar con los estudiantes de profesorado para poder fortalecer los programas de formación.

Sin embargo, el grueso de profesionales de la educación se encuentra en las aulas, por lo que si bien es importante voltear a ver la formación del futuro profesor tan importante es prestar atención en el conocimiento que presentan los profesores en activo. Estos últimos son quienes se encuentran trabajando con los estudiantes, por lo que explorar sus conocimientos permite identificar qué aspectos son importante atender en su formación para desarrollar propuestas de acompañamiento que favorezcan caminar hacia el desarrollo de conocimientos efectivos que puedan incidir en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Por otro lado, los resultados de las investigaciones aquí presentadas muestran que los conocimientos algebraicos de los profesores en formación no son suficientes, lo que deriva en dificultades para resolver tareas usando un conocimiento algebraico consolidado (Aké, 2021; Castro y Godino, 2014; Ferreira et al., 2022; Hohensee, 2017; Stephens, 2008; Tanisli y Kose, 2003; Zapatera y Quevedo, 2001). Lo cual, con mucha seguridad, no dista de la realidad de los profesores en activo ya que son producto de procesos de formación inicial similares.

De los puntos anteriores se deriva la importancia de estudiar los conocimientos de los profesores en activo, siendo ésta una de las variables de estudio que se considerará en esta investigación.

Por otro lado, a pesar de que las investigaciones reportan que la generalización constituye una puerta hacia el estudio formal del Álgebra (Hohensee, 2017), así como que los estudiantes de edades tempranas posean capacidad para resolver tareas de generalización (Carraher et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2021, citado en Narváez et al., 2023), la revisión realizada nos muestra que los profesores presentan dificultades para articular reglas o expresiones algebraicas generales (Aké, 2021; Trujillo et. al., 2010), así como problemas para interpretar el pensamiento matemático de los alumnos sobre aspectos de generalización y reconocer las tareas de este tipo (Castro y Godino, 2014; Zapatera y Callejo, 2013;).

De acuerdo con lo encontrado en esta revisión, se considera importante poder dirigir este trabajo hacia el estudio del conocimiento del profesor de nivel primaria sobre el proceso de generalización. Lo anterior en virtud de profundizar de forma puntal sobre qué elementos de la generalización son los que posee y pone en juego el profesor al resolver tareas que implican este proceso cognitivo, a fin de apoyar su propio desarrollo del pensamiento algebraico y que éste pueda incidir en el de sus estudiantes.

A propósito de lo anterior, Aké (2021) sostiene la importancia de proporcionar escenarios a los docentes donde tengan acercamiento a procesos de pensamiento algebraico asociados con la generalización de propiedades y relaciones funcionales. Lo anterior, de acuerdo con la misma autora, es un aspecto que puede apoyar en la algebrización de su propia actividad matemática y que a su vez apoye al desarrollo del pensamiento algebraico de sus estudiantes.

Las investigaciones revisadas coinciden en la importancia de generar espacios para el profesorado que les permita ampliar su comprensión sobre el razonamiento algebraico elemental, examinar más ejemplos del razonamiento de los estudiantes de primaria sobre ideas algebraicas, comprender el significado del pensamiento algebraico y resolver tareas que orienten su acción para impulsar la progresión del pensamiento matemático de sus estudiantes hacia niveles de generalización (Castro y Godino, 2014; Godino, et al., 2014; Ferreira et. al., 2022; Hohensee, 2017).

Por lo que en este estudio se considera conveniente trabajar con docentes a través de un espacio que les permita explorar y discutir tareas matemáticas de *Early Algebra*, a fin de profundizar en su conocimiento no sólo desde las respuestas escritas sino desde la interacción de lo que hacen, por qué y para qué lo hacen; es decir, poder reparar en los argumentos de sus análisis y que esto permita profundizar en su conocimiento.

Las investigaciones aquí reportadas son una muestra del estudio que se ha realizado sobre los profesores desde la propuesta curricular del *Early Algebra*. Este esfuerzo por identificar qué conocimientos necesitan los profesores para desarrollar esta propuesta deja entrever la falta de preparación del profesorado que se encuentra ligada a la ausencia de oportunidades para desarrollar pensamiento de este tipo, lo que lleva a tener creencias alejadas de lo que realmente implica el Álgebra.

Por lo anterior, es importante continuar profundizando en el conocimiento del profesor, cada vez acotando en la investigación aspectos más puntuales sobre los fundamentos del *Early Algebra*. Es por ello por lo que en este trabajo se enfocará el estudio en caracterizar el conocimiento del profesor de forma específica en el proceso de generalización.

1.3. Planteamiento de la investigación

1.3.1. Problemática

Los estándares del *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM, 2000) recomiendan que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado en edades tempranas desde la Educación Infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a construir bases sólidas de aprendizaje como preparación para el estudio más sofisticado en el Álgebra; ya que esto puede apoyar a los estudiantes a tener éxito matemático en grados más avanzado (Blanton et al., 2011)

La inserción de *Early Algebra* en primaria, como propuesta curricular, ha constituido una respuesta a esta recomendación, pues apuesta por promover la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para desarrollar un modo de pensamiento matemático sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas (Blanton y Kaput, 2005).

Sin embargo, su integración en algunos currículums constituye una propuesta relativamente reciente, por lo que muchos futuros maestros de primaria (y profesores en activo) han tenido pocas o nulas oportunidades durante su propia educación primaria para explorarla (Hohensee, 2017). De lo anterior se puede inferir que, ante una propuesta curricular como ésta, quizás los profesores no tienen la preparación adecuada para su abordaje en el aula, pues el Álgebra temprana es distinta del Álgebra formal; lo que no constituye una preparación suficiente para enseñar *Early Algebra* (Hohensee, 2017)

Sobre lo anterior, investigaciones realizadas con futuros profesores de primaria y Educación Infantil reportan que enfrentan dificultades tales como la identificación de las relaciones contenidas en las expresiones algebraicas, lograr rescatar elementos matemáticos para articular reglas generales o poner de manifiesto aspectos de generalización de propiedades y relaciones funcionales, incluso para apreciar el papel de ésta para justificar una declaración general sobre números (Aké, 2021; Hohensee, 2017; Stephens, 2008).

Incluso, presentan dificultades de dominio con respecto a los conocimientos que se requieren para enfrentar tareas algebraicas tempranas e incorporar estrategias de enseñanza para su instrucción (Bair y Rich, 2011; Gasteiger et al., 2020; Cabral et al., 2020, citados en Pincheira y Alsina, 2022).

Por otro lado, a pesar de que la generalización es un proceso que permite dar sentido a la matemática, que es importante dentro del desarrollo del pensamiento algebraico (Blanton et al., 2015; Mason, 1996, 1999) y que incluso, investigaciones revelan que, los estudiantes desde temprana edad son capaces de desarrollarla (Carraher et al., 2008; Mason, 2017; Pinto y Cañadas, 2021); si los profesores no son conscientes de su presencia y no tienen la costumbre de hacer que los estudiantes trabajen para expresar sus propias generalizaciones, entonces el pensamiento algebraico no está teniendo lugar (Mason, 1996).

Las investigaciones dejan de manifiesto las dificultades que enfrentan los profesores para poner en juego su propio proceso de generalización e interpretar el de sus alumnos (Aké, 2021; Castro y Godino, 2014; Trujillo et. al., 2010; Zapatera y Callejo, 2013); de lo que se hace necesario profundizar en el conocimiento que el profesor pone en acción ante su propio proceso de generalización.

Finalmente, los estudios sobre el proceso de formación de profesores de primaria dejan de evidencia la importancia de acercarlos a escenarios en los que se brinden ejemplos donde experimente el desarrollo del pensamiento algebraico y de los procesos fundamentales de éste, tal como el proceso de generalización; así como de incrementar las investigaciones al respecto (Aké, 2021; Hohensee, 2017; Trujillo et al., 20210)

En suma, las investigaciones reportan que la preparación de los profesores de nivel primaria no es suficiente para hacer frente a una propuesta curricular que apuesta por el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, así como dejan en evidencia la necesidad de profundizar en el estudio del conocimiento sobre el proceso de generalización que los profesores ponen en acción y de brindar escenarios en los que trabajen el desarrollo del pensamiento algebraico a fin de hacer evidente procesos esenciales como lo son la generalización.

1.3.2. Problema de investigación

La necesidad de los profesores de nivel primaria en cuanto a sus conocimientos sobre el proceso de generalización que les permitan la algebrización de su actividad matemática, así como interpretar el proceso de pensamiento de los estudiantes en términos de este proceso cognitivo.

1.3.3. Pregunta de investigación

¿Qué conocimientos ponen en acción los profesores de primero y segundo de primaria al enfrentarse a actividades de *Early Algebra* que involucren el proceso de generalización?

1.3.4. Objetivo general

Caracterizar los conocimientos que ponen en acción los profesores de primero y segundo de primaria cuando se enfrentan a actividades de *Early Algebra* que involucren el proceso de generalización.

1.3.5. Objetivos particulares

- Rediseñar una secuencia de actividades de *Early Algebra* que involucre el proceso de generalización y aplicarla.

- Identificar los conocimientos que los profesores de primero y segundo de primaria ponen en acción cuando se enfrentan a las actividades de *Early Algebra* que involucran el proceso de generalización.
- Analizar los conocimientos identificados.

1.3.6. Hipótesis

Cuando se enfrentan a actividades de generalización desde *Early Algebra*, los profesores de primero y segundo de nivel primaria ponen en acción Conocimiento Matemático y Conocimiento Didáctico del Contenido.

Dentro del Conocimiento Matemáticos ponen en acción conocimientos tales como:

- Conocer las definiciones de generalización y patrones.
- Conocer usos y aplicaciones de la generalización dentro del nivel que atienden.
- Conocer procedimientos para identificar patrones, por ejemplo, la variable de agrupamiento.
- Conocer procedimientos para generalizar, tal como identificar el patrón, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó, extender el razonamiento a casos indeterminados.
- Conocer registros de representación para expresar la generalización, tal como el verbal, gráfico y simbólico.

Dentro del Conocimientos Didáctico del Contenido ponen en acción conocimientos tales como:

- Conocer formas de aprendizaje del proceso de generalización, por ejemplo, la identificación de patrones en secuencias geométricas y numéricas.
- Conocer los errores y dificultades que los estudiantes pueden cometer al generalizar.
- Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza la generalización de patrones.
- Conocer las formas en las que los estudiantes pueden hacer evidente la identificación de un patrón, tal como generar expresiones como “lo que se repite”
- Conocer la potencialidad del uso de materiales concretos para favorecer el proceso de generalización.

1.3.7. Justificación

Las investigaciones sobre *Early Algebra* y la formación de profesores, revelan que se requiere incrementar los estudios sobre el conocimiento del contenido de los profesores en varios componentes (Castro et al., 2011; Tanisli y Kose, 2013). Castro y Godino (2011) afirman que tener más investigación con relación en lo anterior brinda elementos para la creación de oportunidades dirigida a los profesores para aprender a reconocer y a promover el pensamiento algebraico.

Por lo anterior, la investigación aquí propuesta representa un aporte ya que se suma al incremento de estudios de este corte y puede brindar información relevante con relación al conocimiento del profesor de primaria en activo. Los resultados que se obtengan de este trabajo pueden proporcionar hallazgos que favorezcan la creación de espacios para la formación continua del profesorado en términos de *Early Algebra*.

Por otro lado, algunos autores informan cómo los alumnos de primaria pueden articular la generalidad en patrones crecientes, discutir tareas matemáticas que implican generalización, o que son capaces de generalizar (Castro y Godino, 2014; Narváez et al., 2023); sin embargo, los futuros profesores no son capaces de proponer actividades relacionadas con la generalización, donde la validez sea cuestionada y discutida (Castro y Godino, 2014).

Incluso, investigaciones como la de Zapatera y Callejo (2013) revelan la dificultad de los profesores para interpretar los procesos de generalización de los estudiantes, describir las características del proceso de generalización de los alumnos de primaria usando los elementos matemáticos relevantes en la resolución de las tareas propuestas.

Lo anterior deja de manifiesto la importancia de estudiar el conocimiento que el profesor de nivel primaria pone en acción en términos de generalización, cuando se enfrentan a actividades de *Early Algebra* a fin de categorizarlos y tener evidencia de lo que el docente conoce y es capaz de hacer con ese conocimiento para potenciarlo y tener referentes que permitan promover espacios de fortalecimiento profesional. Por lo que el estudio que aquí se propone representa un aporte en este sentido.

1.3.8. Alcances

Con esta investigación se espera recuperar Conocimientos Matemáticos y Conocimientos Didáctico del contenido, en términos del proceso de generalización, que profesores de primero y segundo de primaria ponen en juego al enfrentarse a actividades de *Early Algebra,* para lograr una categorización de estos desde el modelo MTSK que aporte a la investigación sobre el conocimiento algebraico del profesor de primaria. Se espera que los hallazgos que se alcancen con esta investigación logren contribuir a la información que se tiene con respecto al conocimiento del profesor de primaria a fin tener elementos que permitan construir espacios que favorezcan su formación para desarrollar pensamiento algebraico temprano en sus estudiantes.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos de este estudio. Para desarrollar esta investigación se retoma tres ejes teóricos fundamentales de acuerdo con las variables centrales: conocimiento del profesor, *Early Algebra* y conocimientos sobre aspectos de generalización.

Partiendo del conocimiento del profesor, en este capítulo se presenta el marco teórico que se empleará para caracterizar el conocimiento del profesor de nivel primaria, el modelo del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) o Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, en español. Para ello se explica de manera breve los antecedentes de este modelo, se presenta su conceptualización y organización de este, y se describen los dominios y subdominios que lo componen.

Para abordar lo referente al pensamiento algebraico en edades tempranas, se presenta el modelo curricular que tomamos como eje para el estudio, *Early Algebra*. Se describe brevemente el surgimiento de este modelo curricular, su relevancia en el desarrollo del pensamiento algebraico de estudiantes en edades tempranas, se presenta la conceptualización del mismo, así como se exponen temas que permiten su desarrollo.

Finalmente, se abordan lo referente a la generalización. Para ello se expone su importancia en edades tempranas, así como la conceptualización, los tipos de generalización, los tipos de tareas de generalización y estrategias de solución, así como los temas que favorecen el proceso de generalización.

Todo lo anterior con la finalidad de presentar los elementos teóricos centrales del estudio y dejar de manifiesto la postura que se tendrá sobre estos en la investigación.

2.1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Para el logro del objetivo de este trabajo, es decir caracterizar los conocimientos sobre generalización de los profesores de primero y segundo de primaria, se ha elegido como modelo teórico de análisis, el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) o Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática, propuesto por Carrillo et al. (2018).

El MTSK es un modelo que tiene como bases teóricas la propuesta de Shulman (1986), "Conocimiento del Contenido para la Enseñanza", el cual enfatiza que el conocimiento que el profesor debe poseer para enseñar va más allá de únicamente el conocimiento de la materia (Aguilar, et al. 2013); y dentro de la Matemática Educativa retoma el modelo de Ball et al. (2008) "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT), que busca analizar el conocimiento que el docente ejerce en su práctica y que lo identifica como profesor de matemáticas.

En Shulman (1986) se proponen tres dominios del conocimiento del profesor: Subject Matter Knowledge (SMK) o Conocimiento de la Materia, Pedagogical Content Knowledge (PCK) o Conocimiento Didáctico del Contenido, y Curricular Knowledge

(CK) o Conocimiento Curricular. El modelo MTSK organiza el conocimiento del profesor de matemáticas retomando los dominios de conocimientos propuestos por Shulman (1986), bajo una reorganización, pero manteniendo la esencia de éstos.

De manera muy específica el MTSK da relevancia al gran aporte de Shulman, el PCK, entendido como el conocimiento que va más allá de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza, y que hace específico el conocimiento del profesor. Éste es retomado como uno de los dos grandes dominios del modelo MTSK, profundizando el conocimiento que el profesor de matemáticas debe tener en términos de la enseñanza y el aprendizaje de esta materia.

Por su parte del modelo de Ball et al. (2008), retoma una aportación importante al conocimiento del profesor de matemáticas, el Specialised Content Knowledge (SCK) o Conocimiento Especializado del Contenido. Ball et al. (2008) caracterizan el SCK como el conocimiento que le permita al profesor de matemáticas desempaquetar los descubrimientos matemáticos para generar conocimiento para la enseñanza y aprendizaje; diferenciando el conocimiento del profesor de matemáticas del conocimiento de otro profesor (distinto a matemáticas) o profesionista (que posea conocimientos matemáticos).

Sin embargo, en el modelo de MKT el SCK solo es una parte del conocimiento, por lo que Carrillo et al. (2012) retoman este aporte, pero proponen que los especializado permee todos los dominios y subdominios, ya que este tipo de conocimiento debe ser específico tanto en términos del Conocimiento Matemático como del Conocimiento Didáctico del Contenido (Zakaryan y Sosa, 2021).

Retomando estos aportes teóricos, el MTSK es una propuesta que profundiza en el conocimiento especializado que el profesor de matemáticas pone en práctica al desarrollar su ejercicio docente. En este sentido el modelo busca comprender el conocimiento del profesor que "es inherente a su tarea como docente y, por tanto, es especializado" (Liñan et al., 2016, p. 12), aquel que le permite diseñar propuestas didácticas, proponer tareas, ejercicios, ejemplos; es decir enseñar matemáticas.

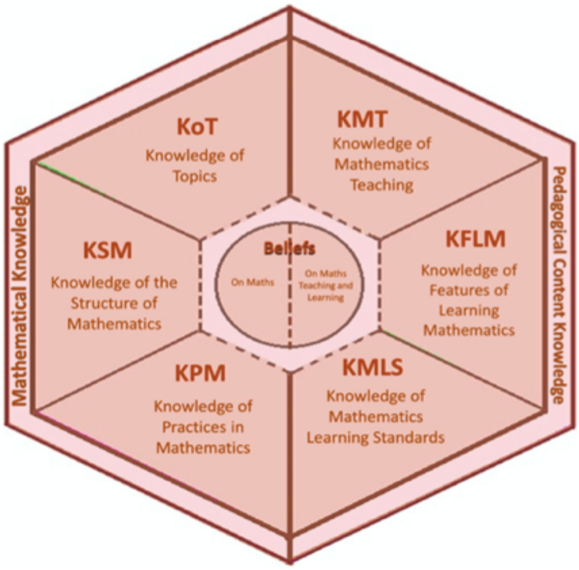
Este refinamiento del modelo MKT, permite tener una mayor profundidad en el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas; al permear el carácter de especializado a los dominios y subdominio del modelo. Lo que hace adecuado el uso de este modelo para la investigación que nos compete.

El MTSK retoma los dos grandes tipos de conocimiento organizado en el modelo MKT, el SMK y el PCK, precisando el SMK desde lo matemático a través del dominio Mathematical Knowledge (MK) o Conocimiento Matemático, en español. Así, en este modelo se organiza el conocimiento en los dominios MK y PCK, los cuales se encuentran compuestos por tres subdominios con categorías internas.

Este modelo también considera que las creencias y concepciones del profesor frente a las matemáticas tanto como ciencia como dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, influyen en el desarrollo de su conocimiento, por lo que dentro del modelo son consideradas al centro permeando a los dominios y subdominios (ver figura 3).

Figura 3

Modelo MTSK.



Nota. Tomado de "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model" (p. 6) por J. Carrillo et. al*,* 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

A continuación, se definen los dos dominios que componen el modelo MTSK, junto con sus respectivos subdominios y categorías internas.

2.1.1. MK, subdominios y categorías

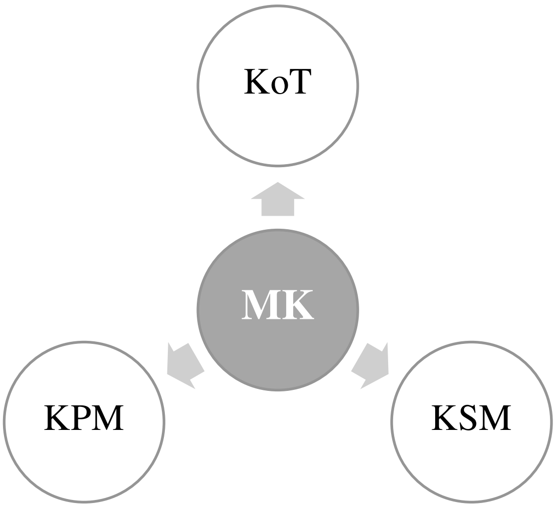
De acuerdo con Carrillo et al., (2018) el dominio MK se refiere al conocimiento que posee el profesor con respecto a "las matemáticas como una red de conocimientos sistémicos estructurados según sus propias reglas" (p. 4); y se encuentra organizado en subdominios que permiten entender lo que el profesor de matemáticas sabe de la disciplina, cómo conectan estas ideas con algunas más avanzadas u otras más elementales, así como la forma en la cual comprenden el funcionamiento de los entes matemáticos.

El dominio MK se organiza en tres subdominios. Knowledge of Topics (KoT) o Conocimiento de los Temas; Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) o Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas; y Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) o Conocimiento de Prácticas en Matemáticas (Figura 4).

El primer subdominio que se presenta es el KoT, es decir el conocimiento del contenido matemático en sí mismo. Este subdominio describe qué y de qué manera conoce los temas que enseña el profesor de matemáticas, implica "un nivel de profundización, organización y estructuración superior al que van a recibir los estudiantes" (Ma, 1999, citado en Liñan, Contreras y Barrera, 2016 p. 13), sobre el contenido y sus significados (Carrillo et al., 2018).

Figura 4

Subdominios pertenecientes al dominio MK.



Fuente: elaboración propia retomando la investigación "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model" (p. 6) por J. Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

El KoT considera cinco categorías que permiten organizar los elementos que lo componen: fenomenología, propiedades matemáticas y sus fundamentos, definiciones, procedimientos, registros de representación y definiciones (Figura 5).

La *fenomenología*, implica el conocimiento sobre el tipo de problemas a los que se puede aplicar el contenido, con sus contextos y significados (Carrillo-Yañez *et al*., 2018). De acuerdo con Liñán et al., (2016), este conocimiento es visto desde dos posiciones.

La primera posición desde la que puede verse la fenomenología tiene que ver con el *conjunto de situaciones en las que se puede ubicar el tema matemático*. Un ejemplo ilustrativo "es como a pesar de que el concepto de variable y procesos infinitos relacionados, pueden resultar ajenos a estudiantes de primaria, estos pueden reflejarse de forma fenomenológica con el paso del tiempo o la repetición cíclica de las estaciones del año" (Montes, 2015, citando en Liñán et. al., 2006, p. 15).

La segunda perspectiva desde la que puede mirarse la fenomenología señala el *conocimiento de los usos y aplicaciones de un tema dentro de la propia matemática*, y no para comprender otras ciencias; Liñán et. al. (2016) ilustran esta postura con "la aplicación del teorema de Pitágoras en la construcción de ángulos rectos" (p. 15).

Por su parte las *propiedades matemáticas y sus fundamentos*, se relacionan con los atributos o cualidades de los conceptos matemáticos. Esta categoría engloba los procesos matemáticos de un tema (propiedades, teoremas, etc.) con sus demostraciones y la axiomática (Liñán et. al., 2016).

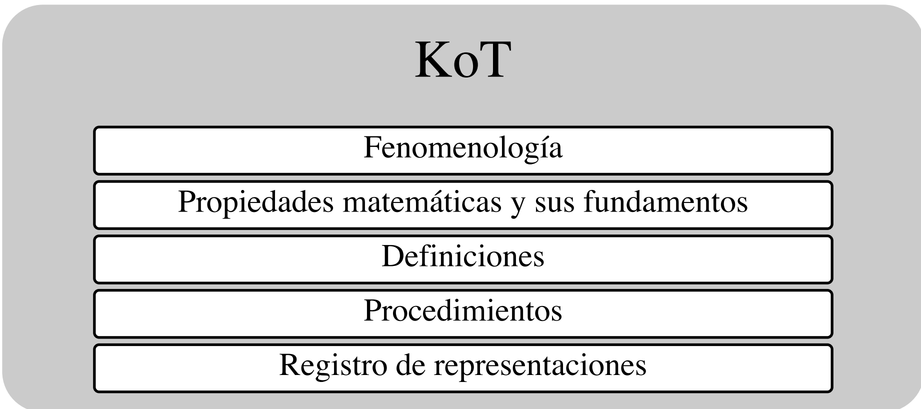
En lo que respecta a la categoría de *definiciones* se encuentra el conocimiento de las propiedades que hacen definible de forma precisa un concepto matemático, así como las maneras alternativas que se empleen para definirlo (Liñán et. al., 2016; Carrillo et al., 2018).

En la categoría de *procedimientos*, se encuentran el uso de algoritmos tradicional o alternativos que puedan utilizarse para resolver tareas sobre el contenido matemático, en donde se pone en acción el conocimiento de cómo, cuándo y por qué se hace o utiliza de esa forma, es decir el fundamento de los algoritmos (Carrillo et al., 2018), lo que "implica una conexión con las propiedades y sus fundamentos" (Liñán et al., 2016, p.16). Esta categoría también involucra el conocimiento de las características que tendría el objeto resultante asociadas al tema en cuestión (Liñán et al., 2016).

En lo que respecta a la categoría de *registros de representación*, esta involucra el conocimiento que permite ilustrar un contenido, proceso o procedimiento matemático, ya sea de manera gráfica, verbal, algebraica, aritmética, pictográfica, entre otras; y las cuales incluyen el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones (Carrillo et al., 2018).

Figura 5

*Categoría pertenecientes al subdominio KoT***.**



Fuente: elaboración propia retomando la investigación "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model" (p.7) por J. Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

El segundo subdominio que se presenta es el KSM, este implica el conocimiento sobre las conexiones entre temas matemáticos ya sea de un mismo nivel o de niveles educativos distinto. Tal subdominio "tiene sus bases en el Horizont Content Knowledge descrito por Ball et al (2008)" (Flores et al, 2014, p. 61), el cual "contempla el conocimiento que le permite a un profesor enseñar los temas de un curso como fundamentación para cursos posteriores" (Flores et al, 2014, p. 61).

A este subdominio pertenecen cuatro categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares (ver figura 6).

La primera categoría, las *conexiones de complejización*, se refiere a la relación de los contenidos enseñados con contenidos posteriores o más avanzado (Carrillo et al., 2018). Por ejemplo, el conocimiento que la actividad de agrupar se conecta con la operación de multiplicación.

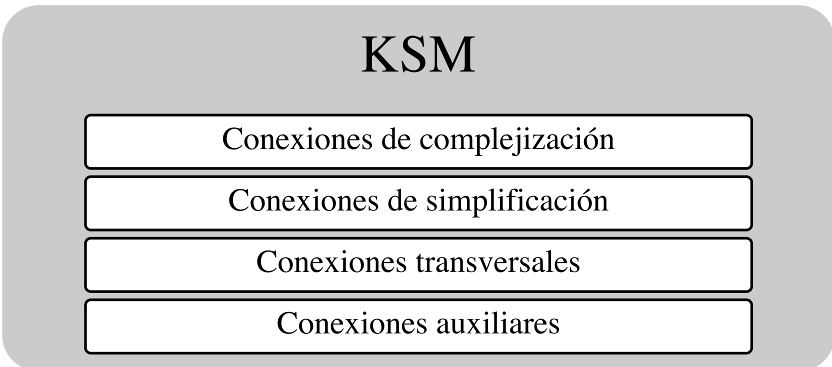
Por su parte, en la segunda categoría, *conexiones de simplificación*, se reconocen los enlaces de los temas con contenidos previos, es decir “la matemática avanzada se contextualiza retrospectivamente en el contenido matemático más elemental sobre el que se basa” (Zakaryan y Sosa, 2021). Por ejemplo, que el trabajo a escalas se conecta con la actividad de ordenar.

La categoría de *conexiones transversales*, a diferencia de las anteriores no se relaciona con la conexión entre contenidos más simples o complejos, sino que se producen cuando diferentes elementos de contenido tienen características en común (Carrillo et al., 2018).

Finalmente, la categoría de *conexiones auxiliares*, que se refiere a la utilidad que tienen los conceptos para el desarrollo de otros (Carrillo et al., 2018). Por ejemplo, “el uso de ecuaciones como auxiliar para determinar las raíces (o determinar la no existencia de estas) de una función (…). Aquí la necesidad de encontrar raíces hace de la ecuación un elemento auxiliar para la función” (Flores et al, 2014, p. 62).

Figura 6

Categorías pertenecientes al subdominio KSM.



Fuente: elaboración propia retomando la investigación “The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model” (pp.8-9) por J. Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3)

Finalmente, el último subdominio del dominio MK que se presenta es el KPM. De acuerdo con Carrillo et al. (2018) corresponde al conocimiento sobre el funcionamiento de las matemáticas, sobre los razonamientos que explican las formas de actuar en matemáticas. Estos autores definen el concepto de práctica como “cualquier actividad matemática realizada de forma sistemática, que representa un pilar de la creación matemática y que se ajusta a una base lógica de la que se pueden extraer reglas” (Carrillo et al., 2018, p. 10)

De acuerdo con Flores et al. (2014) “este subdominio destaca la importancia de que el profesor no sólo conozca resultados matemáticos establecidos (conocimiento considerado en el KoT), sino también las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático" (p. 63).

Este subdominio incluye el conocimiento sobre el papel que juega demostrar, justificar, definir, hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el papel de los contraejemplos. En suma, involucra la comprensión de la lógica que sustenta a cada una de las prácticas citadas (Zakaryan y Sosa, 2021) y se "refiere a lo que se puede llamar un conocimiento sintáctico de las matemáticas" (Schwab, 1978, citado en Zakaryan y Sosa, 2021, p. 77).

De acuerdo con el estudio realizado por Zakaryan y Sosa (2021) este subdominio incluye, entre otros, el conocimiento sobre el uso del lenguaje matemático, así como del papel de los símbolos y convenciones matemáticas; involucra el saber validar los entes matemáticos, al igual que el caracterizar el quehacer matemático a través del conocimiento del papel de la generalización en matemáticas y de algunas estrategias heurísticas de la resolución de problemas matemáticos.

Lo anterior sustentado en ejemplos del conocimiento de la práctica matemática que brindan algunos autores, tales como saber validar el conocimiento en matemáticas, identificar los roles de los ejemplos y contraejemplos en el proceso de validación, así como de la prueba como una herramienta de demostración; al igual que el conocimiento del profesor de las heurísticas y las estrategias de resolución de problemas (Balacheff, 2000; Götte, Renzulli y Scaglia, 2010; Lakatos, 1976; Martínez, 2005; Poincaré, 1984; Polya, 1945; Schoenfeld, 1992, citados en Zakaryan y Sosa, 2021)

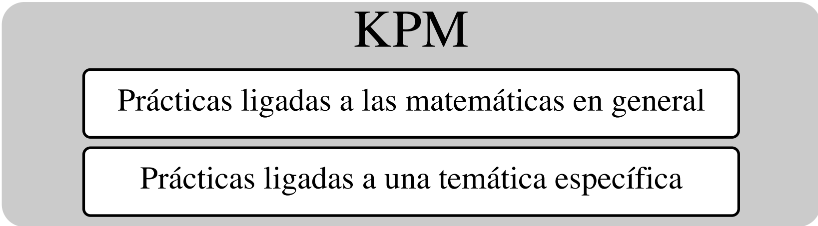
Por lo anterior el KPM ayuda a comprender el funcionamiento de diversos aspectos de la matemática, así como a negociar el razonamiento matemático que los estudiantes ponen en juego, con el objetivo de poder aceptarlo, refutarlo o refinarlo; de aquí la importancia de que el profesor de matemática posea este tipo de conocimiento (Zakaryan y Sosa 2021). Este conocimiento se encuentra está integrado por dos categorías: las prácticas ligadas a las matemáticas en general y las prácticas ligadas a una temática específica (ver figura 7).

La primera categoría, *las prácticas ligadas a las matemáticas en general*, "considera un tipo de conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto abordado" (Flores e. al, 2014, p. 63); el papel o rol que juegan actividades matemáticas tales como las demostraciones o conjeturas al hacer matemáticas. De acuerdo con Flores et al. (2014) este conocimiento permite entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos.

La segunda categoría, *prácticas ligadas a una temática específica* en matemáticas, se asocian a las peculiaridades del tema en cuestión y se vincula con los razonamientos que se emplean al manipular un concepto específico (Carrillo et al., 2018). Un ejemplo expuesto por Flores et al. (2014) es cuando "un profesor, al trabajar con conjuntos numerables infinitos, recurre a la inducción para probar cierta propiedad (…) al saber que, como el conjunto es infinito y numerable, una aproximación al razonamiento sobre dichos conjuntos mediante un pensamiento inductivo suele usarse para la búsqueda de generalización" (p. 63).

Figura 7

Categorías pertenecientes al subdominio KPM.



Fuente: elaboración propia retomando la investigación "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model" (pp. 9-10) por J. Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

En suma, el MK, organizado en los subdominios y categorías presentadas, es el "conocimiento que guardan relación directa con la organización interna de la matemática: temas, conexiones entre los entes matemáticos y formas de hacer o construir matemáticas" (Zakaryan y Sosa, 2021, p. 7). Reconocer este conocimiento en el profesor permite identificar las formas en como éste interactúa con la matemática desde los fundamentos disciplinares que le permiten comprender de manera profunda los temas.

En este sentido, y de acuerdo con la conceptualización y con los objetivos planteados para esta investigación, se considera importante retomar cada uno de los dominios MK. El KoT permitirá valorar el nivel de profundización, organización y estructuración que posee el profesor sobre el proceso de generalización para desarrollar pensamiento algebraico en estudiantes de edades tempranas.

Por su parte, el KSM, apoyará a identificar el conocimiento que el profesor de nivel primaria tiene en cuanto a las conexiones de los temas que aborda en su nivel con la generalización en niveles más avanzados, así como las conexiones del proceso de generalización del grado que atiende con acciones o práctica que los estudiantes han desarrollado en niveles anteriores.

Finalmente, el KPM permitirá identificar el conocimiento que el profesor posee sobre el papel que juega la generalización en el *Early Algebra*, permitiendo analizar las prácticas que ponen en juego al solucionar tareas desde *Early Algebra*.

2.1.2. PCK, subdominios y categorías

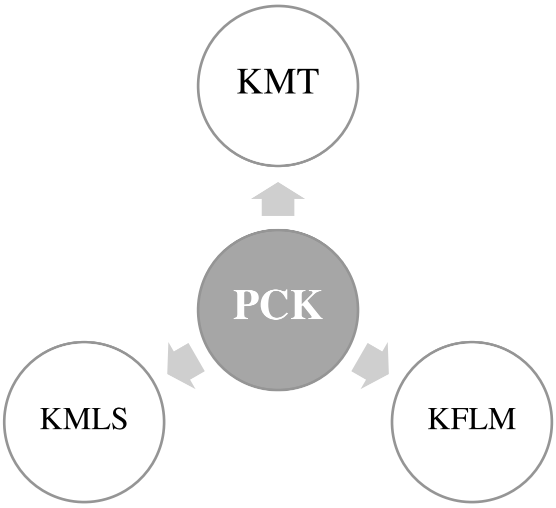
Al igual que los trabajos de Shulman (1986) y de Ball (2000), el MTSK retoma el PCK y "reconoce la importancia del conocimiento del contenido matemático en términos de enseñanza y aprendizaje" (Carrillo et al., 2018), al ser un conocimiento que permite al profesor presentar un contenido matemático de forma comprensible a otros, es decir considera al contenido matemático como un objeto de enseñanza, de aprendizaje.

El modelo MTSK, toma la postura que el dominio PCK está relacionado con las matemáticas mismas, considerándolo un tipo específico de conocimiento de la didáctica derivado de las matemáticas. Por lo que este constituye, "un conocimiento particular del profesor, propio de la labor de enseñanza" (Sosa et al., 2016, p. 154). Por esta razón en el modelo no se considera el subdominio de conocimiento didáctico general, sino que sólo aquel conocimiento en el que el contenido matemático determina la enseñanza y el aprendizaje (Carrillo et. al., 2018).

Por lo anterior, el modelo MTSK organiza el dominio PCK en los siguientes subdominios: Knowledge of Mathematics Teaching (KMT) o Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM) o Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, y Knowledge Mathematics Learning Standards (KMLS) o Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (ver figura 8).

Figura 8

Subdominios pertenecientes al dominio PCK.



Fuente: elaboración propia retomando la investigación "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model" (pp.10-11) por J. Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

El subdominio KMT, de acuerdo con Carrillo et al., (2018), se caracteriza por ser el conocimiento teórico específico de la enseñanza de las matemáticas, considera el conocimiento de estrategias y tareas para la enseñanza, así como de recursos y materiales que pueden ser utilizados para presentar un contenido matemático a enseñar.

El KMT "le permite al profesor seleccionar representaciones particulares, ejemplos, libros de texto o ciertos materiales para la enseñanza de un concepto o procedimiento matemático" (Sosa et al., 2016, p. 155). Este dominio se compone de tres categorías: teorías de enseñanza de las matemáticas, recursos de enseñanza y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (ver figura 9).

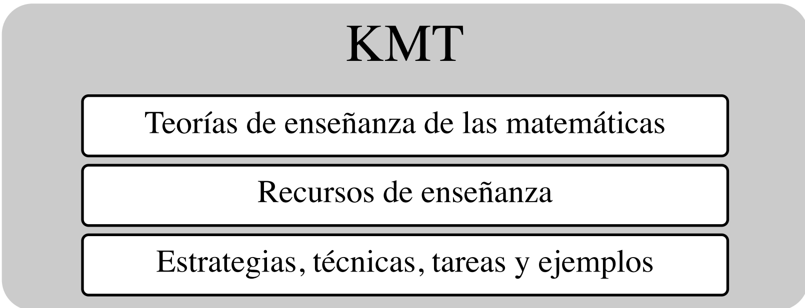
La primera categoría *teorías de enseñanza de las matemáticas*, se refiere al conocimiento teórico específicos de la enseñanza, el cual puede ser tanto personales como institucional. Por ejemplo, el conocimiento teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) la cual puede utilizarse en el diseño actividades para la enseñanza.

Por su parte, la categoría *recursos de enseñanza*, comprende el conocimiento sobre los recursos y materiales didácticos, ya sea físicos o digitales; y va más allá del conocer cómo se usan, sino que abarca la valoración crítica de cómo pueden mejorar la enseñanza en un tema particular considerando los beneficios y dificultades. Por ejemplo, conocer que el uso del geoplano de tipo rectangular para clasificar triángulos, puede no generar triángulos equiláteros (Carrillo et al., 2018).

La categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, implica conocer el potencial de éstas para la enseñanza de contenidos matemáticos específicos, así como las posibles limitaciones y obstáculos que puedan surgir. Esta categoría también engloba el conocimiento sobre las diferentes formas de representar contenidos específicos (a través de metáforas, situaciones o explicaciones). Por ejemplo, "saber que una estrategia para que los estudiantes comprendan o realicen un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en señalar lo que la actividad les demanda" (Sosa et. al., 2016, p. 169)

Figura 9

Categorías pertenecientes al subdominio KMT.



Fuente: elaboración propia retomando la investigación "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model" (p. 12) por J. Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

Por su parte, el dominio KFLM hace referencia a la importancia de que el docente sea consciente de cómo los estudiantes piensan y construyen el conocimiento al ejecutar las actividades y resolver las tareas matemáticas (Carrillo et. al., 2018). Surge ante "la necesidad de que el profesor conozca y entienda lo que pueden pensar matemáticamente los estudiantes ante las actividades que se le asignan" (Sosa et al., 2016, p. 176).

De acuerdo con Sosa et al. (2016) el subdominio KFLM implica el conocimiento que el profesor posee sobre los procesos de aprehensión de los objetos matemáticos, así como de los fenómenos derivados, tales como los errores, obstáculos, dificultades, etc., que el estudiante pueda enfrentan dentro de su proceso de aprendizaje. En suma, implica un conocimiento que permita al profesor anticiparte a los modos de pensamiento de los estudiantes (Sosa et al., 2016)

Para lograr profundizar en este tipo de conocimiento el modelo MTSK organiza el subdominio KFLM en cuatro categorías: teorías de aprendizaje de las matemáticas, fortalezas y limitaciones en el aprendizaje de las matemáticas, formas de interacción del estudiantado con el contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas (ver figura 10).

La categoría correspondiente a las *Teorías de aprendizaje de las matemáticas* hace referencia al conocimiento sobre teorías relacionadas con el desarrollo cognitivo de los estudiantes con respecto tanto a las matemáticas en general como a un contenido matemático en particular; incorpora conocimientos sobre estilos de aprendizaje y diferentes formas de percibir un contenido matemático de forma específica (Carrillo et al., 2018). Estas teorías pueden ser tanto formales, es decir que sean validadas dentro de la Matemática Educativa, como personales. Esta última retoma el conocimiento que el profesor posee con respecto a los modos de aprendizaje de los estudiantes ante ciertos temas dado por su experiencia, lo que le puede permitir identificar las formas de aprovechar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes para abordar un nuevo contenido (Sosa et al., 2016). Por ejemplo el conocimiento de la Teoría de aprendizaje APOE de Dubinsky (1991).

Por su parte, la categoría correspondiente a las *fortalezas y limitaciones en el aprendizaje de las matemáticas*, implica de acuerdo con Carrillo et al. (2018) la consciencia de dónde los estudiantes tienen dificultades, presentan errores o por el contrario, dónde muestran fortalezas, tanto de un contenido específico como de las matemáticas en general.

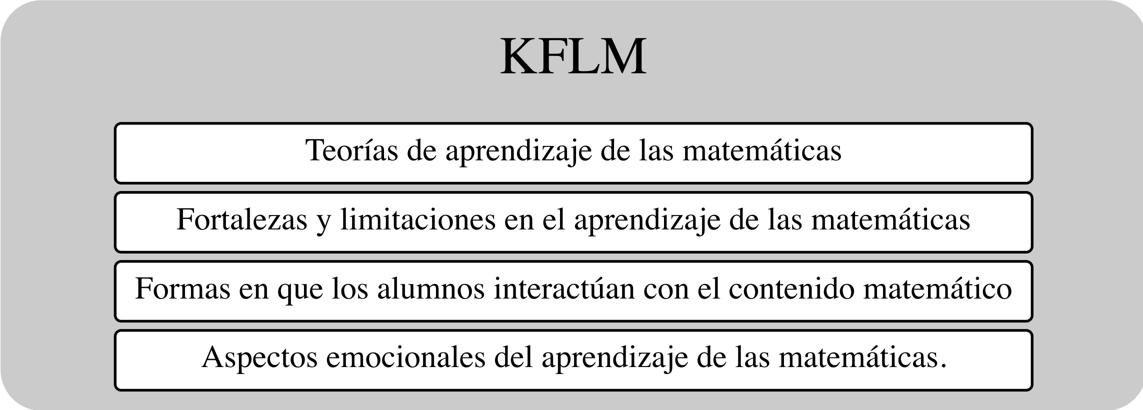
Lo anterior implica identificar las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático, así como reconocer los errores y confusiones matemáticos que pudieran tener éstos. Al igual que conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas (Sosa et al., 2016). Por ejemplo, "conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando" (Sosa et al., 2016, p. 185)

En lo que respecta a la categoría asociada a las *formas de interacción del estudiantado con el contenido matemático*, ésta incluye el conocimiento sobre los procedimientos y estrategias que utilizan los alumnos para hacer matemáticas, así como el lenguaje que utilizan al referirse a los contenidos matemáticos (Carrillo et al., 2018). Ejemplo de este tipo de conocimiento es conocer cuando los cálculos matemáticos realizados por éstos son ejecutados de manera mecánica sin tener una consciencia de lo que se está realizando matemáticamente (Sosa et al., 2016).

Finalmente, la categoría de *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, implica el conocimiento que se tiene sobre aspecto como ansiedad matemática, motivación de los estudiantes, intereses y expectativas de éstos sobre las matemáticas (Carrillo et al., 2018), los cuales influyen dentro del proceso de aprendizaje y tienen por ende un impacto (positivo o negativo).

Figura 10

Categorías pertenecientes al subdominio KFLM.



Fuente: elaboración propia retomando la investigación "The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model" (pp. 11-12) por J. Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

Por su parte, el subdominio KMLS se refiere al conocimiento del profesor sobre lo que el alumno debe o puede lograr en un nivel particular, así como reconocer lo que ha estudiado previamente y las especificaciones para los niveles posteriores.

El KMLS implica el conocimiento de los instrumentos diseñados para medir el nivel de habilidad de los estudiantes en la comprensión, construcción y uso de las matemáticas, y que se pueden aplicar en cualquier etapa específica de la escolaridad (Carrillo et al., 2018). En suma, implica el conocimiento sobre las habilidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se favorecen de acuerdo al nivel educativo marcado curricularmente (Escudero, 2015).

El subdominio de KMLS está conformado por tres categorías: resultados de aprendizaje esperado, nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental y secuencia de temas (ver figura. 11)

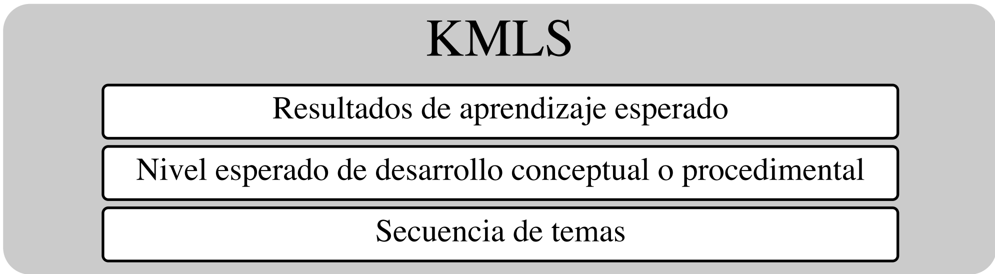
La categoría de *resultado de aprendizaje esperado,* implica el conocimiento de los contenidos matemáticos que se enseñan en cualquier nivel en particular; es un conocimiento adquirido por el docente a partir de los lineamientos curriculares o recuperando las habilidades específicas que es necesario trabajar en cada momento. Por ejemplo, conocer los aprendizajes esperados para el nivel de cuarto de primaria de acuerdo con los programas de estudios vigentes.

Por su parte la categoría *nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental*, delimita el grado de profundidad con el que se presenta un contenido matemático en un nivel escolar en particular. Un ejemplo de este tipo de conocimiento es "saber qué tipos de clasificaciones de figuras se espera que haga un alumno de tercer grado" (Flores et al., 2014, p. 69),

Finalmente, la categoría de *secuencia de temas*, ubica los temas tanto en retrospectiva, es decir relacionándolos con los conocimientos adquiridos previamente, como en prospectiva, estableciendo una relación con los conocimientos que se abordaran posteriormente. Por ejemplo, “según el Ministerio de la Presidencia [España] (2006), en el primer ciclo (grados 1 y 2), la multiplicación es trabajada como el número de veces y en el segundo ciclo (grados 3 y 4) es vista como suma abreviada, en disposiciones rectangulares y problemas combinatorios” (Flores et al., 2014, p. 69)

Figura 11

Categorías pertenecientes al subdominio KMLS.



Fuente: elaboración propia retomando la investigación “The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model” (p. 13) por J, Carrillo et al., 2018, Research in Mathematics Education, 20(3).

Para este estudio, se consideran importante los dominios del PCK, ya que brinda información relevante con respecto al conocimiento en términos de enseñanza y aprendizaje.

El dominio KMT ofrece categoría de análisis que nos permiten profundizar en el conocimiento que el profesor de primaria pone en acción sobre teorías de enseñanza, recurso, estrategias, ejemplos, al enfrentarse al hacer frente a la enseñanza de la generalización de acuerdo con el grado que atiende.

Mientras que dominio KFLM, favorecerá valorar el conocimiento que el profesor pone en juego al analizar las características del aprendizaje de la generalización en estudiantes de edades tempranas, permitiendo identificar el tipo de conocimiento que necesita para poder potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Finalmente, el dominio KSML brinda elementos para situar el desarrollo del proceso de generalización en los primeros grados de primaria de acuerdo con los programas de estudios vigentes, permitiendo reconocer el conocimiento que el profesor tiene sobre este aspecto.

Por todo lo expuesto en este apartado, se considera al MTSK como un modelo adecuado que permitirá profundizar en el conocimiento que profesor de nivel primaria tiene sobre el proceso de generalización; ya que constituye un modelo en el que el carácter especializado permea cada uno de los dominios y subdominios con sus categorías, lo que hace posible particularizar más el análisis de los conocimientos que los profesores ponen en acción.

2.2. Early Algebra

En este apartado se presentan los elementos teóricos fundamentales que permiten tomar postura con respecto a la propuesta curricular que guía esta investigación. Se parte de presentar el origen de ésta, mostrando la necesidad que atiende; posteriormente se conceptualiza esta propuesta curricular; también se presenta la definición de pensamiento algebraico, el tipo de pensamiento que se busca favorecer con tal propuesta curricular; y finalmente se exponen los temas centrales que atiende el *Early Algebra*.

2.2.1. Origen de la propuesta

Las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando comienzan el estudio formal del Álgebra, dejan de manifiesto la necesidad de profundizar la investigación con respecto al desarrollo del pensamiento algebraico, siendo *"un área muy necesitada de la investigación matemática"* Kieran (1989, p.163). Sin embargo, los resultados obtenidos hasta antes de los noventa daban señales de que los estudios debían girar su mirada hacia otro lado; ya que ésta se centraba en lo que los alumnos no podían hacer, más que en estudiar las capacidades de éstos y el potencial desarrollo del pensamiento algebraico (Lins y Kaput, 2004).

En la década de los noventa, algunas investigaciones comenzaron a mostrar una perspectiva diferente al reportar cambios en la concepción de la educación algebraica y del pensamiento algebraico, al sugerir que los alumnos desde muy pequeños pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba en un principio, incluso pueden desarrollar modos de pensamiento que les permita trabajar con relaciones funcionales, plantear y probar conjeturas, así como generalizar; en especial cuando se les provee de experiencias y enseñanza adecuada (Kaput y Blanton, 2001; Kieran, 2004; Lins y Kaput, 2004; Mason, 1999).

Mason (1996) afirma que los estudiantes llegan al aula con capacidades naturales de generalización, que les permiten identificar patrones, analizar casos concretos y expandir estos análisis a casos más amplios llegando a expresar la generalidad. Este autor sostiene que si los estudiantes llegan con esta capacidad natural de generalización, es cuestión de explotarlas para generar pensamiento algebraico temprano.

Por lo tanto, comenzar el desarrollo del pensamiento algebraico desde Educación Primaria ayuda a desarrollar concepciones matemáticas más complejas (Blanton y Kaput, 2005). Es por ello por lo que autores como Kaput (2000) proponen "la algebrización" del currículo, esto implica desarrollar pensamiento algebraico retomando los temas marcados curricularmente en Educación Básica.

De esta manera desde mediados de los años noventa, se han realizado de manera internacional investigaciones que analizan y promueven esta integración del pensamiento algebraico desde edades escolares tempranas (Molina, 2011). De lo que han surgido propuestas curriculares como: la preálgebra y el *Early Algebra*. Ambas "promueven iniciar el pensamiento algebraico en la Educación Primaria con actividades que desarrollen la habilidad para generalizar y recomiendan el trabajo con patrones y el estudio de sus regularidades” (Zapatera, 2018, p. 52).

A pesar de que ambas propuestas se encuentran relacionadas con la inserción de elementos que permitan apoyar la enseñanza formal del Álgebra, existen diferencias en su finalidad y el momento de introducción.

> “La preálgebra intenta suavizar la transición entre la aritmética y el álgebra y reducir las dificultades que sufren los alumnos en el aprendizaje del álgebra y la *Early Algebra* tiene unos objetivos más amplios e intenta introducir modos del pensamiento algebraico en el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas.
>
> La preálgebra propone introducir el álgebra como una aritmética generalizada en los dos últimos cursos de la Educación Primaria y la *Early Algebra* propone introducir el álgebra desde los primeros cursos de escolarización integrada en los otros bloques de contenidos”.
>
> (Zapatera, 2018, p. 52)

Es por ello por lo que, tomando en cuenta la finalidad y el momento de introducción de las propuestas curriculares, dentro de este estudio se retoma el *Early Algebra*; al ser una propuesta que plantea la inserción de modos de pensamiento que permitan al estudiante desarrollar relaciones, plantear conjeturas, establecer procesos de generalización, más que introducir lenguaje o conceptos algebraicos. De igual forma, de acuerdo con los fines que persigue esta propuesta y el nivel al que va dirigido, se consideró que el *Early Algebra* es una propuesta adecuada, puesto que plantea la introducción del pensamiento algebraico desde los primeros cursos escolares.

2.2.2. Conceptualización

Early Algebra es una propuesta curricular que plantea introducir modos de pensamiento algebraico desde edades tempranas en Educación Básica, esta propuesta no implica agregar contenido con la formalidad algebraica sino aprovechar los temas que se abordan en los primeros grados escolares y favorecer habilidades que le permitan a los estudiantes identificar las relaciones y extender sus razonamientos no solo a casos particulares sino a casos más amplios (Kaput, 2008; Molina, 2009). Es decir, esta propuesta no se enfoca en el contenido puramente algebraico que implique técnicas o procedimientos para resolver ecuaciones o simplificar expresiones, sino que aporta una perspectiva más ecléctica a los tipos de actividades que podríamos describir como Álgebra (Blanton et al., 2011).

Stephens et al. (2015) sostiene que el *Early Algebra* “proporciona a los estudiantes de primaria el tiempo y el espacio necesarios para desarrollar sus formas intuitivas e informales de razonamiento sobre los patrones y relaciones que ven en su trabajo aritmético y en sus experiencias cotidianas como base para el pensamiento algebraico.” (p. 143).

De acuerdo con Kilpatrick (2011) si interpretamos el currículo como una lista de contenidos, la propuesta de *Early Algebra* no supone un cambio profundo, ya que como se señala ésta no propone introducir contenido algebraico propiamente; sin embargo si se mira al currículo como un espacio que permite construir experiencias en los estudiantes, entonces dicha propuesta curricular representa un cambio profundo, pues se propone profundizar en los contenidos desde el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Esta propuesta apuesta por la introducción del álgebra en edades tempranas, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas (Vergel, 2010).

En suma, *Early Algebra* es una propuesta que busca desarrollar modos de pensamiento –relacional, funcional, recursivo– que se manifiestan por medio de diversas tareas, como "el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelización, la justificación, el ensayo y error y la predicción" (Kieran, 2004, p. 149).

2.2.3. Pensamiento algebraico

Si bien el *Early Algebra* representa un medio para desarrollar el pensamiento algebraico, ¿qué entender por pensamiento algebraico?

Desde la reflexión de Mason (1999) este tipo de pensamiento implica trascender la simple identificación de hechos y realización de cálculos con números específicos hacia el estudio de aspectos relacionales.

Autores como Blanton y Kaput (2005), caracterizan este tipo de pensamiento como un "proceso en el que los alumnos generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de ejemplos particulares, establecen esta generalización a través de la argumentación, y la expresan gradualmente de una forma simbólica apropiada para su edad". (p. 413).

Para Radford (2006), el pensamiento algebraico conlleva tres elementos interrelacionados:

- El sentido de indeterminancia, es decir lo desconocido y opuesto a la determinación numérica; como lo son las incógnitas y variables.
- La analiticidad, la forma de trabajar con los objetos indeterminados como si se tratara de algo conocido; implica el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La designación simbólica de sus objetos, manera específica de nombrar o referir los objetos.

Cyrino y Oliveira (2011) por su parte define el pensamiento algebraico "un modo de describir significados atribuidos a los objetos del álgebra, a las relaciones existentes entre ellos, a la modelación, y a la resolución de problemas en el contexto de la generalización de estos objetos" (citados en Moreira y Nacarato, 2020 p. 159).

Stephens et al (2015) conceptualiza el pensamiento algebraico como el tipo de "pensamiento matemático que ocurre cuando los estudiantes identifican relaciones en operaciones aritméticas, expresiones, ecuaciones o datos de funciones que pueden generalizar más allá de los casos dados" (p. 94). Y Cañadas y Molina (2016), lo considera como las formas de hacer, pensar y hablar sobre el álgebra.

En todos los casos se coincide que es un modo de pensar que no se encuentra necesariamente relacionado con el uso del lenguaje y el simbolismo algebraico propiamente, si no que transciende al desarrollo de habilidades que le permiten al estudiante, entre otras cosas generalizar y establecer relaciones funcionales, abarcando más allá de los casos particulares.

Comprender el pensamiento algebraico desde esta perspectiva puede ayudar a desprendernos del hecho de únicamente desarrollar pensamiento algebraico cuando se trabaja con símbolos alfanuméricos e ir hacia el análisis de las relaciones, identificación de estructuras, la generalización, modelación, etc.

2.2.4. Temas para el desarrollo del *Early Algebra*

El *Early Algebra* no constituye un conjunto separado de actividades que los profesores pueden enseñar después de que se hayan dominado las habilidades y los procedimientos aritméticos; al contrario, constituye una forma de pensar que aporta significado, profundidad y coherencia a la comprensión matemática de los niños al profundizar en los conceptos, de modo que existe la oportunidad de generalizar las relaciones y las propiedades en matemáticas (Blanton et al., 2007).

Al igual que el álgebra en cualquier nivel, como se describe en los Principios rectores para el currículo y la evaluación de las matemáticas del NCTM (2000), el álgebra inicial es una forma de "explorar, analizar y representar conceptos e ideas matemáticos … y generalizar ideas y relaciones matemáticas, que aplicar a una amplia variedad de entornos matemáticos y no matemáticos" (p. 4).

"Los enfoques de álgebra temprana concuerdan en que no es necesario agregar más contenidos al programa escolar, sino tratar con mayor profundidad los temas que ya se cubren, subrayando las ideas de generalización, estructura y relaciones" (Butto y Rojano, 2004, p. 59).

Es por ello por lo que desde *Early Algebra* se propone el estudio de temas que apoyen al desarrollo del pensamiento algebraico y que se encuentren ligados a la concepción del álgebra escolar, tal como: Aritmética generalizada, generalización de patrones y relaciones numéricas y el estudio de relaciones funcionales, la resolución de problemas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y el desarrollo y la manipulación del simbolismo algebraico (Kaput, 2000).

En cada uno de los cuales la generalización juega un papel fundamental, fungiendo diversos roles que permiten desarrollar modos de pensamiento dentro del álgebra. Es por ello por lo que autores como Kaput (2008) sostienen que la esencia del *Early Algebra* está en generalizar ideas matemáticas, representar y justificar generalizaciones de múltiples maneras y razonar con generalizaciones. Tal como se profundizará en el siguiente apartado.

2.3. Generalización

La generalización es considerada como un eje central dentro del Álgebra, así como en el conocimiento matemático y el conocimiento en general (Mason, 1996). De acuerdo con Vergel y Rojas (2013) en la perspectiva del "álgebra temprana", el reconocimiento de lo general desempeña un papel fundamental como condición previa de la expresión, los autores afirman que estas formas de expresión son progresivas y evolucionan, desde movimientos, gestos, palabras, frases hasta la incorporación explícita de símbolos "inventados" y/o convencionales para "capturar" la generalidad y hacerla operativa.

Diversos autores consideran que la generalización es una valiosa vía de introducción del Álgebra escolar, incluso la consideran como la esencia de ésta (Mason, 1996; Trujillo, Castro y Molina 2009). Según Mason (1996), la generalización es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico; de acuerdo con este autor hasta que "la conciencia de la generalización no impregne el aula, el álgebra no dejará de ser un hito para la mayoría de las personas" (p. 65), ya que permite desarrollar la abstracción matemática.

En este espacio se abordarán elementos relevantes para la investigación sobre la generalización, tales como su desarrollo en edades temprana, la conceptualización de la generalización y proceso de generalización, los tipos de generalización y lo niveles correspondientes.

2.3.1. La generalización en edades tempranas.

La generalización es un proceso fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico y de la abstracción matemática (Butto y Rojano, 2004; Mason, 1996). Aunque pueden existir preguntas particulares difíciles en Álgebra, en casi todos los casos hay implícito un proceso de generalización que permite que se pueda aplicar a casos más generales o reformular afirmaciones (Mason, 1996).

Las investigaciones han demostrado que los estudiantes de grados inferiores son capaces de resolver tareas relacionadas con funciones, así como realizar generalizaciones (Carraher et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2021). Incluso "la capacidad para detectar patrones y expresar generalidad está presente en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso a la escuela" (Mason, 1999, p.232). Y si bien, muchas veces no son capaces de expresar la generalización de forma analítica o la presencia de la analiticidad puede ser incipiente es a través de sus acciones que perciben dicha generalización (Ayala y Molina, 2021).

De acuerdo con el estudio realizado por Ayala y Molina (2021) con estudiantes de 4to grado, "el sentido estructural y el reconocimiento de una estructura asociada a la situación problema es la evidencia que permite inferir que comienzan a razonar de modo analítico" (p.215). Esta forma de generalización es denominada como *generalización en acto*, de acuerdo con Mason (1996). Este autor lo describe como "una posibilidad de pensar algebraicamente y se observa cuando los niños actúan como si percibieran la generalidad sin llegar a expresarla" (p. 75).

El campo de investigación de *Early Algebra* ha dejado de manifiesto que los estudiantes desde edad temprana son capaces de identificar e incluso comenzar a explicar relaciones entre cantidades y no únicamente el trabajo con patrones recursivos simples (Blanton et al., 2015).

Blanton et al. (2015) sostiene que los estudiantes desde pequeños "pueden comenzar a usar la notación variable para representar las relaciones entre cantidades (…) y no solo son capaces de un pensamiento funcional más profundo de lo que se pensaba anteriormente, sino que los orígenes de estas ideas aparecen en los grados antes de lo esperado" (p. 513). De esta manera, se deja de manifiesto que los niños desde edad muy temprana son capaces de notar la relación entre cantidades y darle sentido.

2.3.2. Conceptualización

De acuerdo con Cañadas y Castro (2008), la generalización es realizada cuando "una conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada" (p.57).

Kaput (1999) define la generalización como:

> *"extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos". (p.140)*

Para Radford (2010) "la generalización se basa en captar una característica común sobre algunos elementos de la secuencia y que este elemento en común aplique para todos los casos" (p. 41).

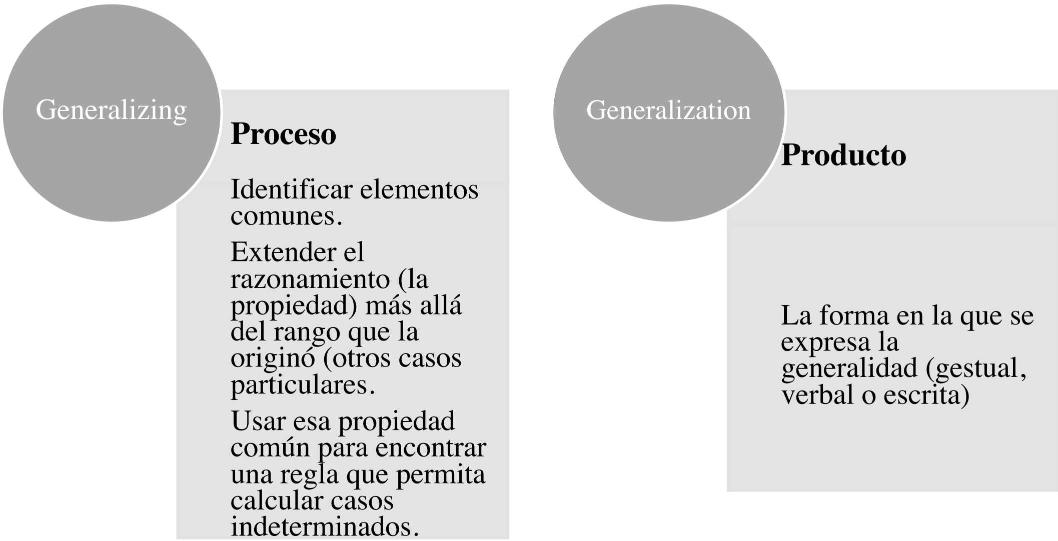
"La generalización nos permite analizar relaciones entre cantidades y extraer una regularidad ante una situación dada, donde se identifican propiedades que van más allá de una instancia particular" (Narváez, et. al, 2023, p.242).

Ayala y Molina (2021) sostienen que la generalización (con respecto a patrones y relaciones funcionales) se puede ver desde dos perspectivas, la primera como proceso (generalizing) y la segunda como producto (generalization).

De acuerdo con Ellis (2007), la generalización como producto es cuando se expresa la generalidad ya sea de manera gestual, verbal o escrita. Mientras que, la generalización como proceso implica identificar los elementos comunes a todos los casos, ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó, obtener resultados más amplios que los casos particulares y proporcionar una expresión directa que permita obtener cualquier término (Ellis, 2007). La generalización, como proceso, "permite analizar las particularidades de una situación matemática y sacar una conclusión de ellas" (Narváez, 2023, p. 242) (Figura 12).

Figura 12

La generalización como proceso y como producto



Nota. Esquema realizado con base en la investigación "El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos" (p. 214-25) por C. Ayala y M. Molina, 2021, *PNA*. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 15(3).

Radford (2010) sostiene que el proceso de generalización se produce cuando es posible identifiar una característica común sobre los elementos de una secuencia de modo que se puede brindar una expresión que represente a todos los términos de ésta. Es imporante señalar, que de acuerdo con el autor este reconocimiento de lo común y la identificación de semejanza y diferencia es progresivo.

El citado autor apunta también que, "la generalización como tal es un proceso semiótico de los más naturales y con la semiosis se pueden objetivizar los objetos mediante signos que evolucionan a sistemas más complejos de representación conforme se avanza en generalizaciones" (Radford, 2010, p. 43).

Con base en los fines que persigue esta investigación se abordará la generalización desde la perspectiva de proceso, ya que se busca analizar la serie de acciones que los profesores realizan para llegar a formular o expresar una generalización. Por lo que a lo largo de la investigación se usará el término *proceso de generalización*, para referirnos al conjunto de acciones que el individuo realiza ante una tarea matemática con el objetivo de expresar una generalidad.

2.3.3. Tipos de generalización

En perspectiva de Rojas y Vergel (2013) desde el *Early Algebra*, reconocer lo general desempeña un papel fundamental como una condición previa de la expresión. Señalan que el proceso de generalización es progresivo y evoluciona, yendo de lo gestual hacia la palabra y la simbolización formal que permite capturar la generalidad de un fenómeno.

Tal evolución es reconocida por Radford (2006) quienes definen tres tipos de generalización, o estratos de generalidad, caracterizados por los medios de expresión usados por los sujetos en su actividad, incluyendo movimientos, gestos, lenguaje natural:

1. *Generalización Factual*. Los medios de expresión empleados son los gestos, los movimientos, la actividad perceptual y las palabras. Lo indeterminado no es nombrado, puede interpretarse a través de los gestos o movimiento. Por ejemplo, un estudiante señala el aumento de dos en dos en una secuencia usando el movimiento de su lápiz.
2. *Generalización Contextual*. Los gestos y las palabras son sustituidos por expresiones como frases "clave". Aquí lo indeterminado ya se hace explícito pues es lo que el estudiante lo verbaliza. Por ejemplo, el estudiante dice "dos por la figura".
3. *Generalización Simbólica*. Las frases "clave" son representadas por símbolos. En este tipo de generalización la indeterminación aparte de hacerse explícita se representa por medio de los símbolos. Por ejemplo, mediante expresiones como: $2a$.

Es importante señalar que estos tipos de generalización no son jerárquicos, es decir no se debe pasar por una para llegar a otra, y en algunas ocasiones es posible volver a alguna de ellas de acuerdo con la situación que se analice.

2.3.4. Tipos de tareas de generalización y estrategias de solución

De acuerdo con Stacey (1989), los problemas de generalización contienen tareas que permiten llevar el proceso de generalización, tales como.

1. Tareas de generalización cercana, en las que se pide calcular el valor $f(n)$ para n "pequeños".
2. Tareas de generalización lejana, en las que se pide calcular el valor $f(n)$ para n "grande" y que requiere la identificación de un patrón.
3. Obtención y expresión de la regla general que permita calcular el valor de $f(n)$ para cualquier n.
4. Inversión del proceso para hallar el valor n.

Stacey (1989) identificó que los estudiantes emplean ciertas estrategias o procedimientos para dar respecta a estos tipos de tarea, y en suma para llevar a cabo el proceso de generalización. La cuales se enuncian a continuación.

1. Aproximación recursiva, se hace uso de un método de conteo más o menos sofisticado, como lo es el conteo, el empleo de dibujos o tablas. Esta estrategia es eficiente al resolver tareas de generalización cercana.
2. Aproximación funcional, en esta estrategia se relacionan las dos variables que subyacen a la situación mediante una expresión matemática de la forma $f(n) = an + b$ $(b =/0)$. Este tipo de estrategia puede ayudar a resolver de manera más sencilla las tareas de generalización lejana.
3. Razonamiento proporcional incorrecto, usando la relación $f(n) = an$ en lugar de la relación $f(n) = an + b$ $(b =/0)$.

2.3.5. Caminos de desarrollo del proceso de generalización

Algunos autores señalan que el desarrollo del proceso de generalización puede favorecerse en edades tempranas a través de la *generalización de patrones* y el estudio de *relaciones funcionales* (Mason, 1999; Molina, 2009; Narváez, et. al, 2023; Vergel, 2015).

La *generalización de patrones* es considerada como "una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela" (Radford, 2010, p. 40), ya que permite acercar a los estudiantes a situaciones de variación, las cuales resultan fundamentales en el desarrollo del pensamiento algebraico (Vergel, 2015). Implica observar e interpretar una regularidad y, buscar un patrón que sea válido para más casos (Molina, 2011), a fin de ampliarlo y establecer una expresión de generalización válida para todos los casos.

La conceptualización de patrón se encuentra dada de manera general bajo la idea de repetición o regularidad. Algunos autores definen el concepto de patrón como una regla entre elementos u objetos matemáticos como números y formas (Guerrero y Rivera, 2002); así como una regularidad espacial o numérica (Papic y Mulligan, 2005).

Autores como Dreyfus (1991) y Radford (2008), sostienen que la generalización de patrones engloba tres acciones principales; a) captar un punto o propiedad común o comunalidad en los elementos de una secuencia; b) extender o generalizar esa comunalidad a todos los términos posteriores de la secuencia; y, c) usar la comunidad o propiedad común para determinar una regla que permita hallar cualquier término de la secuencia.

La generalización en patrones retoma la capacidad natural de los estudiantes de percibir regularidades (Schifter et al., 2008) para favorecer el desarrollo del proceso de generalización al incentivar ver más allá de las particularidades de una situación matemática y con base en ello obtener una conclusión (Driscoll, 1999).

Por su parte, el estudio de las *relaciones funcionales* favorece el proceso de generalización, ya que se basa en "promover la percepción y generalización de patrones detectados en situaciones donde hay dos variables relacionadas que cavarían" (Molina y Cañadas, 2018, p. 133).

Este tipo de estudio también favorece que los estudiantes se familiaricen con la representación y generalización de relaciones entre cantidades, representen esas relaciones o funciones de formas variadas a través del lenguaje natural, notación algebraica formal, tablas y gráficos; así como razonar con fluidez con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de la función (Stephens et al., 2015).

El foco de ese tipo de relaciones está en el pensamiento funcional, el cual constituye uno de los componentes fundamentales del pensamiento algebraico, y a través del cual se puede trabajar la generalización (Blanton y Kaput, 2011; Blanton et. al., 2015). El pensamiento funcional se "basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016). De esta forma, el pensamiento funcional implica generalizar las relaciones entre cantidades covariables.

De acuerdo con Blanton et al. (2015) abordar las relaciones funcionales implica:

> "(a) generalizar las relaciones entre cantidades covariables; (b) representar y justificar estas relaciones de múltiples maneras utilizando lenguaje natural, notación variable, tablas, y gráficas; y (c) razonar con fluidez con estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional." (p. 512)

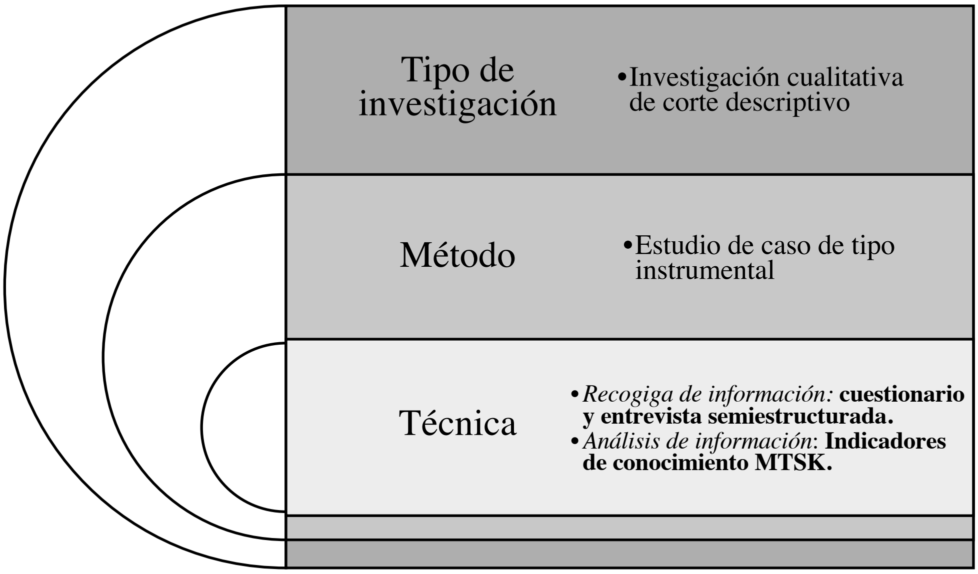
De esta manera el estudio de las relaciones funcionales favorece el desarrollo del proceso de generalización, dado que el trabajo con ellas dentro *Early Algebra*, permite aprovechar la percepción y generalización de patrones para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología que guió la investigación. Para lo cual se explica el tipo y naturaleza de la investigación, el método seleccionado, así como la técnica donde se presentan los instrumentos para recabar y analizar los datos. Un diagrama de esto puede verse en la figura 13.

Figura 13

Marco metodológico de la investigación.



Fuente: elaboración propia.

3.1. Tipo de investigación

El objetivo de esta investigación es caracterizar los conocimientos sobre generalización que ponen en acción los profesores de primero y segundo de primaria cuando se enfrentan a actividades de *Early Algebra*. Es decir, se busca determinar las cualidades del conocimiento que ponen en juego los profesores más que la cuantificación de éstos, por lo que se considera pertinente retomar la *investigación cualitativa* ya que de acuerdo con autores como Kothari (2004) éstas atienden los fenómenos relacionados con la calidad o tipo, siendo su unidad de análisis la cualidad o característica del fenómeno a estudiar.

Por su parte, también se considera pertinente este tipo de investigación ya que, de acuerdo con Hernández et al., (2014) la investigación de tipo cualitativa se enfoca en comprender los fenómenos al ser examinados desde la postura de los participantes dentro de su contexto. Y en este sentido, la investigación aquí presentada busca profundizar en las cualidades del conocimiento matemático del profesor de primaria a partir de cómo éstos perciben y experimentan el fenómeno, profundizando en sus respuestas orales y escritas, puntos de vista, interpretaciones y significados.

Por su parte, al ser un estudio donde se busca caracterizar el conocimiento del profesor, se considera que el corte de la investigación sea de tipo *descriptivo* ya que este busca interpretar y analizar con precisión las propiedades y características de un individuo en particular, una situación, un grupo, comunidades o fenómeno sometido a análisis (Kothari, 2004; Hernández et al., 2014). De igual manera, al ser útil "para mostrar con precisión los ángulos o dimensiones de un fenómeno, suceso, comunidad, contexto o situación" (Hernández et al., p. 92), se considera conveniente retomarlo, ya que en este trabajo se busca determinar con precisión las cualidades o rasgos característicos del conocimiento que los profesores de nivel primaria ponen en juego al resolver actividades de *Early Algebra*.

3.2. Método

"De acuerdo al significado etimológico se entiende por método el camino que se sigue para lograr una meta" (Ocegueda, 2007, p. 29). Delgado (2021), sostiene que el método es "la manera que se emplea por parte del investigador para abordar un determinado fenómeno o problema en un sentido estrictamente procedimental, por lo cual, el método debe dar cuenta de los pasos sucesivos a seguir en el proceso" (p. 7)

Para esta investigación el camino que se ha seleccionado es el *estudio de caso*, caracterizado por Stake (2005) como un estudio de particularidades y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas; y este puede ser desde un individuo hasta un grupo de personas. De acuerdo con Stake (2005), se reconocen tres tipos de estudio de caso: *a) estudio intrínseco de caso,* donde lo que interesa es el *caso en sí* por su naturaleza y no por su relación con otro*; b) estudio instrumental de caso,* cuya característica principal es que busca una comprensión general de un fenómeno, y se emplea el caso como un *instrumento* para entenderlo y aportar elementos teóricos de estudio; y *c) estudio colectivo de casos,* el cual se caracteriza por recuperar un conjunto de casos representativos del fenómenos a estudiar.

De acuerdo con el objetivo de este estudio, se considera conveniente emplear el *estudio instrumental de casos*, ya que lo que se busca con esta investigación es retomar el caso como instrumento que permita para tener mayor claridad sobre el fenómeno, es decir sobre la caracterización del conocimiento que el profesor de nivel primaria pone en juego cuando resuelve actividades que involucre el proceso de generalización desde Early Algebra; mas que estudiar al caso en sí.

Por su parte, la población que constituye el caso son una profesora de primero grado, un profesor de segundo grado y una profesora que atienden primero y segundo grado en el Estado de Veracruz. Se seleccionan como caso representativo para este estudio ya que son profesores en servicio reconocidos por sus colegas como maestros proactivos y cuenta con por lo menos cinco años de experiencia atendiendo estos grados, lo cual se considera puede brindar información útil para la investigación.

3.3. Técnica e instrumentos

"El método es el procedimiento mientras que la técnica es el instrumento que perfecciona el método" (Ocegueda, 2007, p. 39). La técnica hace referencia al conjunto de medios utilizados en determinada actividad, se refiere al comportamiento y los instrumentos que son utilizados en la realización de las operaciones de investigación (Kothari, 2004). En este sentido, la técnica favorece la ejecución del método a través del conjunto de instrumentos que facilitan el logro de los objetivos.

Los instrumentos permiten desarrollar la técnica de manera eficiente, son todas las herramientas de las que se vale el investigador para obtener y analizar la información. De forma específica, la recolección de datos requiere de una diversidad de herramientas empleadas por el investigador para desarrollar los sistemas de información, tales como la entrevista, el cuestionario, la observación, entre otros (Behar, 2008).

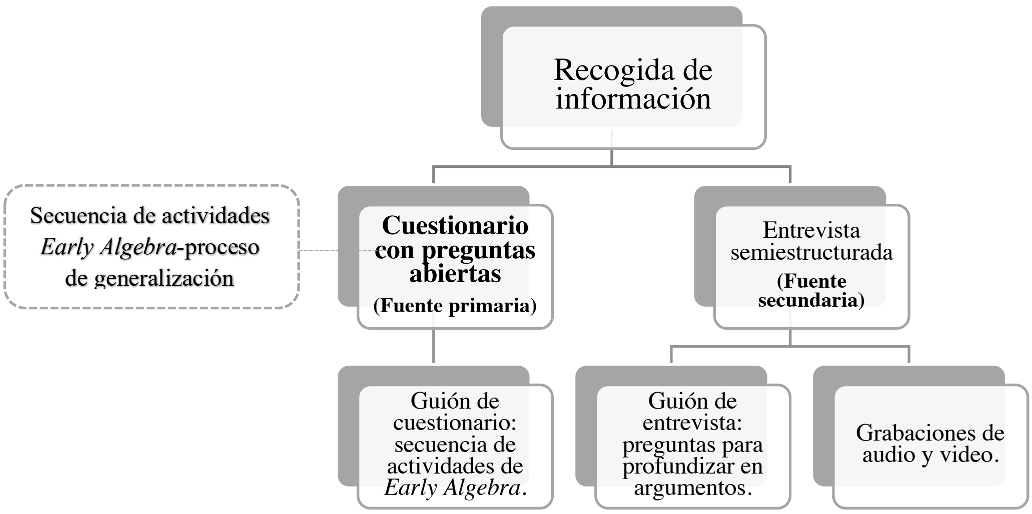
De acuerdo con el objetivo que se persigue en este estudio, se consideran pertinentes las siguientes técnicas con sus respectivos instrumentos para recoger y analizar los datos de estudio.

3.3.1. Técnica e instrumentos para recogida de información.

Las técnicas que se empleará en este trabajo para obtener los datos son el *cuestionario con preguntas abiertas,* como fuente primaria, y la *entrevista semiestructurada*, como fuente secundaria. Dichas técnicas serán apoyadas de instrumentos tales como el guión de cuestionario, constituido por una secuencia de actividades de *Early Algebra*, guión de entrevista y grabaciones de audio y de video; como puede observarse en la figura 14.

Figura 14

Técnicas e instrumentos para recogida de información.



Fuente: elaboración propia.

3.3.1.1. Cuestionario con preguntas abiertas.

El cuestionario “permite al científico social plantear un conjunto de preguntas para recoger información estructurada sobre una muestra de personas … para describir la población a la que pertenecen o contrastar … algunas relaciones entre variables de su interés” (Meneses y Rodríguez, 2011, p. 9). De acuerdo con Behar (2008), el cuestionario "consiste en un conjunto de preguntas con respecto a una o más variables a medir" (p. 64) y el contenido de éstas puede ser tan variado como se requiera.

Los cuestionarios retoman básicamente dos tipos de preguntas: cerradas y abiertas. Los cuestionarios de preguntas cerradas limitan con anterioridad las alternativas de respuestas de los informantes, mientras que los de preguntas abiertas no lo hacen.

De acuerdo con la naturaleza de este estudio se considera conveniente retomar el *cuestionario con preguntas abiertas*, ya que de acuerdo con Behar (2008) este tipo de preguntas permiten obtener información de mayor profundidad y son útiles cuando no se tiene información sobre las posibles respuestas de las personas o cuando ésta es insuficiente. Por lo que este tipo de cuestionario permitirá profundizar en el conocimiento sobre el proceso de generalización que ponen en juego los profesores al enfrentar a actividades de *Early Algebra*.

En este trabajo de investigación, el cuestionario representa la fuente principal de obtención de datos, y se encontrará constituido por una secuencia de actividades de *Early Algebra* que involucren procesos de generalización; a fin de recuperar de manera primordial los siguientes aspectos:

- Las concepciones de los profesores sobre el pensamiento algebraico y el proceso de generalización.
- Las soluciones y argumentos que los profesores dan ante actividades que involucren el proceso de generalización desde *Early Algebra*.

El cuestionario será apoyado a través del siguiente *instrumento*:

- *Guión de cuestionario*. Contendrá la secuencia de actividades de *Early Algebra*, que involucren el proceso de generalización en patrones y relaciones funcionales.
-

3.3.1.1.1. El contenido del cuestionario: la secuencia de actividades.

El contenido del cuestionario está constituido por una secuencia de actividades, la cual es producto de una *revisión sistemática cualitativa*. La revisión sistemática es entendida desde la perspectiva de Riesenberg y Justice (2014) como un camino para la búsqueda objetiva en las afirmaciones de los escritos académicos.

De acuerdo con Riesenberg y Justice (2014):

"Las revisiones sistemáticas utilizan una metodología explícita y rigurosa para identificar todos los artículos relevantes, para abordar de manera crítica cada artículo y para sintetizar la evidencia. El seguimiento de este riguroso proceso permite minimizar los sesgos e incrementar la fiabilidad y la precisión de las conclusiones". (p. 61)

Para los fines de este trabajo, el enfoque de esta revisión es cualitativo, ya que lo que se busca es profundizar en la descripción y análisis de las actividades sobre procesos de generalización que se han abordado en las investigaciones de *Early Algebra*, más que involucrarnos en métodos estadísticos, que son más propios de revisiones sistemáticas cuantitativas.

La revisión sistemática cualitativa que se realizó en esta investigación se hizo sobre trabajos que han estudiado el proceso de generalización en edades tempranas, a fin de identificar las actividades que podían apoyar en la recuperación de los conocimientos sobre proceso de generalización que ponen en juego los profesores de primero y segundo al resolverlas.

Para realizar la revisión sistemática cualitativa se construyeron indicadores de conocimiento del proceso de generalización bajo el modelo MTSK, con el propósito de identificar las actividades donde se puedan hacer evidentes éstos. Para ello se empleó una tabla de identificación de actividades bajo el modelo MTSK-generalización (ver tabla 1), donde se concentraron las actividades a fin de rediseñarlas e incluirlas en el cuestionario de respuestas abiertas. Para mayor profundidad puede consultarse el anexo 1 "Tabla de identificación de actividades bajo el modelo MTSK-generalización".

Tabla 1

Tabla de identificación de actividades bajo el modelo MTSK-generalización.

Dominio	Subdominio	Categoría	Indicador MTSK-generalización	Actividad

De la revisión sistemática cualitativa se identificaron las actividades que contribuyen al logro del objetivo de la investigación y se organizaron en dos sesiones como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

Organización de actividades del instrumento de recogida de información.

Sesiones	Actividades
Generalización en patrones	A.Para mí el pensamiento algebraico es…
	B. ¿Tiene sentido?
	C. Completemos el bordado
	D. El tren de colores
	E. El proceso de generalización de patrones
Generalización en relaciones funcionales	A. Para mí la relació funcional es…
	B. ¿Qué escucho?
	C. ¿Cuántos globos para cada invitado?
	D. ¿Cómo funciona la máquina?

	E. El proceso de generalización en las relaciones funcionales
	F. Diseñando una situación

A continuación se presentan *grosso modo* las actividades que componen el instrumento de recogida de información.

Actividades de la sesión 1: generalización en patrones

Actividad A

Intención: identificar los conocimientos que los profesores *poseen* sobre las definiciones de pensamiento algebraico y generalización, así como los conocimientos que *ponen en acción* para conectar una relación algebraica con los contenidos que se desarrollan en el grado que imparten.

A.1. Reflexione individualmente sobre las siguientes preguntas y responda por escrito.

1. ¿Qué es el pensamiento algebraico?
2. ¿Qué habilidades debe promoverse en los estudiantes para contribuir en el desarrollo del pensamiento algebraico?
3. ¿Qué es la generalización?

A.2. Diseñe individualmente una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $3(n+2)$; sin usar símbolos algebraicos.[1]

Actividad B

Intención: identificar los conocimientos que los profesores *ponen en acción* para conectar los contenidos enseñados con contenidos posteriores.

B.1. Observa la siguiente expresión algebraica y responde

$$\boldsymbol{6n-2(n-1)}$$

1. ¿Para un estudiante de primero o segundo de primaria tendrá sentido esta expresión?
2. ¿De qué depende qué tenga sentido?
3. ¿Cómo podría relacionar esta expresión con un contenido impartido en el grado que atiende?

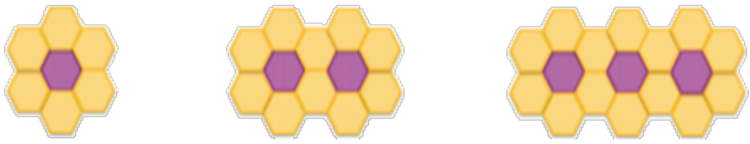
Actividad C[2]

[1] Actividad retomada de Hohensee (2017)
[2] Actividad adaptada de Zapatera (2018)

Intención: identificar los conocimientos que los profesores *ponen en acción* para construir una secuencia con patrón geométrico; así como los *conocimientos* que *ponen en acción* parar reconocer el patrón, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó y a casos indeterminados.

C.1. Observe individualmente el siguiente bordado y lea su descripción.

La siguiente imagen representa un bordado de flores formado con hexágono morado representando el centro de la flor y hexágonos amarillos alrededor como pétalos.



De forma individual responda.

1. ¿Qué veo?
2. ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?
3. Cómo describiría a una persona el proceso que debe seguir para continuar con el bordado.

C.2. Compartan sus respuestas en colectivo y reflexionen sobre ellas.

C.3. Analice las siguientes preguntas y responda.

1. Si agregamos un nuevo centro (hexágono morado) ¿cuántos hexágonos amarillos tenemos que agregar al bordado?
2. ¿Cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morados?
3. Sin construir la composición. Calcule el número de hexágonos amarillos que tendrán si colocamos 10 hexágonos morados.
4. Describe cómo obtuvo el resultado.

C.4. Reunidos en trinas compartan sus análisis de las respuestas anteriores y respondan a las siguientes consignas apoyándose del material proporcionado.

1. Construyan un bordado usando 5 hexágonos morados.
2. Apoyándose en la construcción realizada describan la relación que existe entre la cantidad de hexágonos morados y el número de hexágonos amarillos que se emplean.
3. Completen la siguiente tabla tomando en cuenta sus análisis

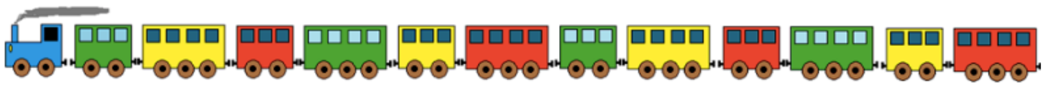
Hexágonos morados	1	2	3	4	5
Hexágonos amarillos	6				

4. Siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿A qué se debe?
5. Si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados ¿es posible generar una expresión que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría?
6. Escriban la expresión que les permita construir el bordado dada una cantidad de flores. Expliquen cómo obtuvieron la expresión.
7. Analicen la expresión construida y describan la relación entre la cantidad de hexágonos amarillos y morados.

Actividad D[3]

Intención: identificar los conocimientos que los profesores ponen en acción para construir una secuencia con patrón geométrico de tres atributos; así como los conocimientos que ponen en acción para identificar el patrón por atributo, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó, extender el razonamiento a casos indeterminados.

D.1. Observen de manera grupal la secuencia de vagones de trenes y describan el patrón de construcción que siguen.



D.2. Individualmente analice la secuencia de vagones de trenes y contesten las siguientes consignas

1. Si considera el color.

   1.1. Rodee con un círculo el núcleo del patrón.
   1.2. Describa el núcleo.
   1.3. ¿Cuántos elementos tiene?
   1.4. Alargue el tren dibujando más vagones considerando este núcleo del patrón.

2. Haga lo mismo, pero con el tamaño.
   2.1. Rodee con un círculo el patrón.
   2.2. Describa el núcleo.
   2.3. ¿Cuántos elementos tiene?
   2.4. Alargue el tren dibujando más vagones considerando este núcleo del patrón.

3.Si considera los dos atributos a la vez.

   3.1.¿Cuál es el núcleo del patrón?
   3.2.¿Cuántos elementos tiene?
   3.3.Alargue el tren dibujando más vagones considerando este nuevo núcleo de patrón.

[3] Actividad retomada de Zapatera (2018).

3.4. Compare cómo son las secuencias construidas en cada consigna ¿son iguales? ¿a qué se debe?

4. Observe nuevamente la secuencia de vagones de trenes

  4.1. ¿Existirá otro atributo? ¿cuál es?
  4.2. Rodee con un círculo el patrón tomando en cuenta este nuevo atributo.
  4.3. Describa el núcleo
  4.4. ¿Cuántos elementos tiene?

5. Considerando los tres atributos a la vez.

  5.1. ¿Cuál es el núcleo del patrón?
  5.2. ¿Cuántos elementos tiene?
  5.3. Alargue el tren dibujando más vagones considerando este nuevo núcleo de patrón.

D.3. De acuerdo con lo realizado, escriba por escrito un mensaje a un compañero donde describa el proceso que debe seguir para continuar con la construcción de los vagones del tren.

Actividad E

Intención: identificar el proceso de generalización que realizaron al resolver la secuencia con patrón geométrico; así como enlazar ese proceso que vivenciaron ellos con el que enfrentan sus estudiantes a fin de ayudar a su desarrollo.

D. 1. A partir de la actividad realizada responda.

1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones?
2. ¿Qué recursos podría emplear para desarrollar el proceso de generalización de patrones en mis estudiantes?
3. ¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer mis estudiantes al generalizar secuencias con patrones?

Actividades de la sesión 2: generalización en relaciones funcionales

Actividad A

Intención: identificar los conocimientos que los profesores *poseen* sobre las definiciones de relación funcional, así como los conocimientos que *ponen en acción* para construir un ejemplo de relación funcional y expresarlo a través de un dibujo.

A.1. Reflexione sobre las siguientes preguntas y responda por escrito

1. ¿Qué es una relación funcional?
2. Escriba un ejemplo de relación funcional
3. Intente expresar su ejemplo anterior a través de un dibujo.

Actividad B

Intención: identificar los conocimientos que los profesores ponen en acción para reconocer un patrón de sonido; así como los conocimientos que ponen en acción para retomar este tipo de experiencia que favorezcan el aprendizaje de la generalización en sus estudiantes.

B.1. Escuche la melodía que reproducirá su facilitador y responda.

1. ¿Fue posible reproducirla de la manera correcta? ¿a qué se debe?
2. ¿Qué patrón tuvieron que seguir?

B.2. Analice la experiencia y reflexione

1. ¿Cómo favorecería el proceso de generalización en los estudiantes a partir de este tipo de experiencia?

Actividad C[4]

Intención: identificar los conocimientos que los profesores *ponen en acción* para generalizar una situación que involucra una relación funcional.

C.1. Lean el siguiente planteamiento.

> *"En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños".*

C.2. Responda de manera individual las siguientes preguntas:

1. Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?
2. Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?
3. Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?
4. Cuando hay 15 invitados, ¿cuántos globos necesita?
5. ¿Cómo obtuve la respuesta? ¿en qué aspectos puse atención?
6. ¿Cómo ayudarías a un estudiante de 1er grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados?

[4] Actividad adaptada de Ayala y Molina (2021)

C.3. Reunidos en trinas compartan sus análisis de la respuesta anteriores y respondan nuevamente las preguntas con ayuda del material proporcionado.

1. ¿Cómo apoyó el uso del material a responder las preguntas de la actividad C.2?
2. ¿Cómo consideran que puede ayudar el uso del material a los estudiantes para identificar la relación entre las variables involucradas?
3. Apoyándose en la experiencia con el material utilizado *describan* la relación que existe entre el número de globos y el número de invitados.
4. Construya una tabla que le permita registrar la cantidad de globos que se necesitan para 1, 2, 3, 4, 5 y 6 invitados.

C.4. Con ayuda del material proporcionado respondan la siguiente pregunta.

1. Un niño de la clase dice que hay 8 invitados, por lo que necesitarán 22 globos. ¿Están de acuerdo con él?
2. ¿Cómo le explicaría a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños?
3. Cuando hay “muchos” / “infinitos” invitados, ¿cuántos globos necesita?
4. Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita?
5. ¿Es correcta la afirmación “cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos” ?, ¿por qué?
6. ¿Es correcta la afirmación “cuando hay Z invitados, se necesitan W globos” ?, ¿por qué?
7. Si estoy pensando en una cantidad de invitados ¿es posible generar una expresión que me ayude a saber la cantidad de globos que necesito? ¿cómo lo harías?
8. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de globos dada una cantidad de invitados.
9. Analicen la expresión construida y describe la relación entre la cantidad de globos y de invitados.

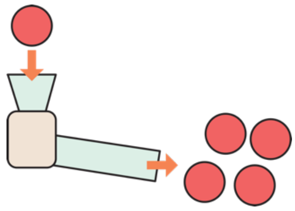
C.5. Reflexione sobre lo que implica esta actividad para sus estudiantes

1. ¿Cómo puede apoyar esta actividad al desarrollo del proceso de generalización de mis estudiantes?
2. ¿Qué conocimientos puede producir esta actividad para mis estudiantes?
3. ¿Cómo explicaría a los estudiantes el proceso de generalización existente en la relación funcional en esta actividad?
4. ¿Qué agregaría o modificaría a la actividad? ¿por qué?

Actividad D[5]

Intención. Identificar los conocimientos que los profesores ponen en acción para generalizar una situación de relación funcional.

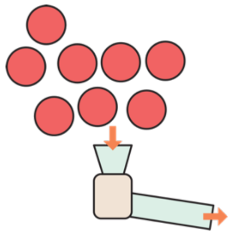
D. 1. Observe la siguiente imagen y responde.



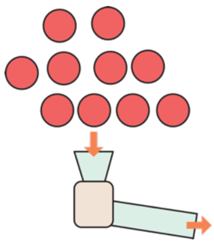
1. ¿Qué veo?
2. ¿Puedo explicar cómo funciona la máquina?

D. 2. Retomando el funcionamiento de la máquina, responda.

1. ¿Cuántas bolas saldrán de la maquina si metemos la siguiente cantidad de pelotas?



2. ¿Y si metemos la siguiente cantidad de pelotas?



3. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 7 bolas?
4. Ponga el número de bolas que desee al principio de la máquina ¿cuántas bolas salen?
5. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe como funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?

D. 3. Compartan sus expresiones para analizarlas y compararlas.

D. 4. Responda los siguientes planteamientos de falso-verdadero

[5] Actividad retomada de Narváez et al. (2023).

1	Si en la máquina metes 4 pelotas, salen 7 bolas.	
2	En la máquina siempre salen 2 pelotas más que las pelotas que has metido.	
3	En la máquina siempre salen 3 pelotas más que las pelotas que has metido.	
4	En la máquina siempre sale el doble del número de pelotas que has metido.	
5	Si meto A pelotas en la máquina, salen A pelotas.	
6	Si meto A pelotas en la máquina, salen A+ 1 pelotas.	
7	Si meto A pelotas en la máquina, salen A+ 3 pelotas.	

D. 5. Conteste las siguientes preguntas

1. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de pelotas que entra y la cantidad de pelotas que sale?
2. Si estoy pensando en una cantidad de bolas para meter a la máquina ¿es posible generar una expresión que me ayude a saber la cantidad de bolas que obtendré? ¿cómo lo harías?
3. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de bolas que saldrán de la máquina si meto una determinada cantidad.
4. Analice la expresión construida y describa la relación entre la cantidad de bolas que ingreso a la máquina y la cantidad que sale.

D. 6. Compartan sus expresiones para analizarlas y compararlas.

Actividad E

Intención. identificar los conocimientos que los profesores ponen en acción para reconocer el proceso de generalización (en relaciones funcionales) de sus estudiantes y favorecer su desarrollo.

E. 1. A partir de las actividades realizadas responda.

1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de las relaciones funcionales?

2. ¿Qué recursos podría emplear para desarrollar el proceso de generalización con relaciones funcionales en mis estudiantes?
3. ¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer mis estudiantes al generalizar relaciones funcionales?
4. ¿Qué temas de los abordados en el grado que imparte es posible recuperar para favorecer el proceso de generalización en sus estudiantes?

Actividad F[6]

Intención: identificar los conocimientos que los profesores ponen en acción para conectar el contenido que imparten en su grado escolar con una expresión algebraica, a fin de darle sentido desde el proceso de generalización (con patrones o relaciones funcionales).

F. 1. Observe la siguiente expresión:

$$3(n+2)$$

1. ¿Cómo mostraría a sus estudiantes la relación representada en esta expresión, sin usar símbolos algebraicos?
2. Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.

F.2. Analice **individualmente** su diseño respondiendo las siguientes preguntas.

1. ¿Qué aspectos consideré para construir la situación?
2. De qué manera los datos de mi situación se encuentran relacionados con la expresión dada.
3. ¿Cómo pueden desarrollar el proceso de generalización mis estudiantes a través de la actividad diseñada?
4. ¿Cuáles pueden ser los posibles errores que mis estudiantes cometan en esta actividad? ¿Cómo puedo apoyarlos a superarlos?
5. ¿Qué representaciones puedo utilizar para apoyar a mis estudiantes a comprender la situación planteada?
6. ¿Qué ayudas serán necesarias que realice con mis estudiantes para favorecer su proceso de generalización?
7. ¿Cómo me será posible evaluar el proceso de generalización que llevan a cabo mis estudiantes? ¿qué expresiones o manifestaciones me permitirán identificar que están generalizando?

Para más detalle puede consultarse el anexo 1 “Instrumento de recogida de datos. Generalización en patrones” y el anexo 2 “Instrumento de recogida de datos.

[6] Actividad adaptada de Hohensee (2017).

Generalización en relaciones funcionales", donde se describe a profundidad las actividades, el rol del aplicador y los indicadores de conocimiento a priori MTSK-generalización que se esperaron identificar en cada una de éstas.

3.3.1.2. Entrevista semiestructurada.

A fin de tener mayor profundidad de los datos recogidos, se ocupó la entrevista como fuente secundaria de obtención de datos. Autores como, Behar (2008) definen la entrevista como:

> "Una forma específica de interacción social que tiene por objeto recolectar datos para una indagación. El investigador formula preguntas a las personas capaces de aportarle datos de interés, estableciendo un diálogo peculiar, asimétrico, donde una de las partes busca recoger informaciones y la otra es la fuente de esas informaciones" (p. 55)

Hernández et al. (2014) conceptualiza la entrevista como "una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)" (p. 403). En la entrevista, a través de las preguntas y respuestas se logra una comunicación y la construcción conjunta de significados con respecto a un tema (Janesick, 1998 citado en Hernández et al, 2014).

La entrevista es una fuente valiosa de información en la investigación cualitativa, ya que permite profundizar en las ideas y conceptualizaciones del caso a investigar, descubriendo de esta manera las realidades que subyacen (Stake, 2005). Behar (2008) resalta que "la ventaja esencial de la entrevista reside en que son los mismos actores sociales quienes proporcionan los datos relativos a sus conductas, opiniones, deseos, actitudes y expectativas" (p. 55).

De acuerdo con Grinnell y Unrau (2011 citado en Hernández et al, 2014) las entrevistas se dividen en estructuradas, semiestructuradas y no estructuradas o abiertas y se caracterizan por lo siguiente.

- Entrevista estructurada. En esta el entrevistador lleva a cabo su labor tomando como referencia una guía donde se señala las preguntas que se formularán y el orden en el cual se realizará.
- Entrevista semiestructurada. Este tipo de entrevista se basa en una guía de asuntos o de preguntas, en la cual se tiene libertad de introducir otras preguntas, ajustar alguna de ellas o precisar algún concepto.
- Entrevista abierta. Este tipo de entrevista, a diferencia de las expuestas anteriormente, no toman como referencia una guía con preguntas, sino que se retoma una guía general de contenidos sobre los que el entrevistador planteará las preguntas que considere necesarias de acuerdo con el desarrollo del diálogo.

De acuerdo con los fines que persigue este estudio, se consideró conveniente retomar la *entrevista semiestructurada*, ya que esta permite tener cierta flexibilidad al momento de entablar el diálogo con los profesores, lo que puede favorecer la profundización en la información obtenida, pero teniendo una guía de preguntas que puedan orientar el diálogo, a fin de no perder de vista los puntos principales sobre los que se quiere profundizar con este instrumento.

La entrevista semiestructurada representó, para este estudio, una fuente complementaria ya que se buscó profundizar en la información obtenida del cuestionario, entablando un diálogo con los profesores que constituyen el caso de estudio a fin de recuperar los argumentos, fundamentos, ideas y razonamiento que éstos dan a las respuestas de las tareas resueltas.

La entrevista que se ocupó en este estudio se estructuró una vez realizado los primeros dos acercamientos al análisis de los datos, pues lo que se buscó fue detallar aspectos relevantes evidenciados en las respuestas del cuestionario (ver anexos 4, 6 y 8).

Para llevar a cabo la entrevista se tomaron en cuenta los siguientes *instrumentos*:

- *Guión de entrevista*. Guía de preguntas para recuperar los argumentos que lo profesores dan a las respuestas de las actividades.
- *Grabaciones de audio y video*. Registro de información por medio de sonidos e imágenes, que ayudó a obtener información detallada de lo que ocurrió en la aplicación de la entrevista semiestructurada.

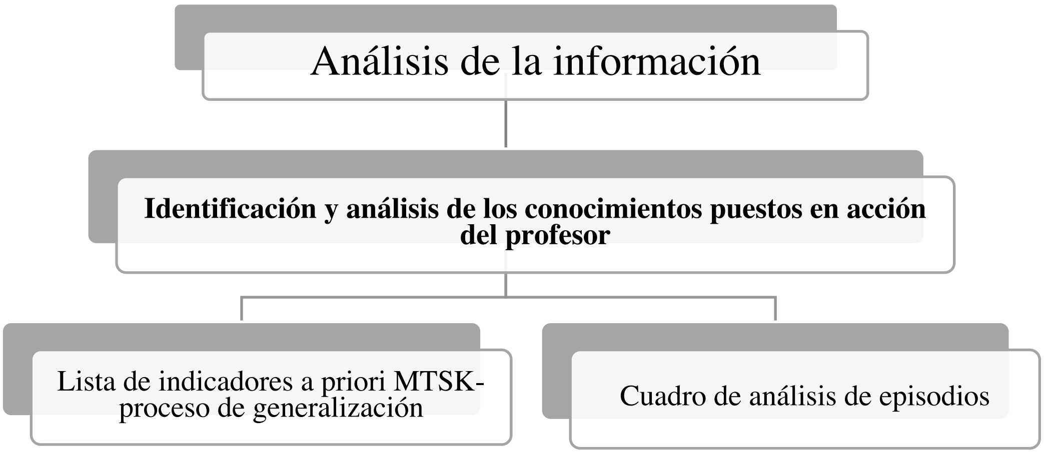
La obtención de los datos a través de las técnicas e instrumentos aquí expuestos se realizó en dos sesiones, de acuerdo con la organización del cuestionario con actividades de *Early Algebra* que involucren procesos de generalización.

3.3.2. Técnica e instrumentos para el análisis de la información

Para el análisis de la información, se planteó realizar una identificación y análisis de los conocimientos puestos en acción del profesor, apoyados de una *lista de indicadores a priori* construida del MTSK-proceso de generalización y un cuadro de análisis adaptado del modelo de análisis de la práctica del profesor de matemáticas de Ribeiro (2008) (ver figura 15)

Figura 15

Técnicas e instrumentos para análisis de información.



Fuente: elaboración propia.

Para lo que se consideró el siguiente proceso.

- Organizar y etiquetar los cuestionarios de acuerdo con las sesiones y actividades.
- Realizar una revisión general para identificar los conocimientos puestos en acción y realizar una primera asociación de los dominios y subdominios correspondientes al modelo MTSK.
- Realizar una primera selección de informantes potenciales para comenzar el proceso de análisis por actividades.
- Profundizar a través de acercamientos de análisis sobre una selección final de informantes.

3.3.2.1. Lista de indicadores a priori.

Toda vez determinadas las actividades que constituían la secuencia, la lista de indicadores construida en el momento de la selección de actividades, se enriqueció quedando como se muestran en la tabla 3. Estos indicadores son señalados dentro del instrumento de recogida de datos en los momentos en los que se espera encontrar. Por que esta lista representa un instrumento importante dentro del proceso de análisis de la información.

Tabla 3

Indicadores a priorio MTSK-proceso de generalización.

Dominio	Sub dominio	Categoría	Indicador a priori
MK	KoT	*Fenomenología*	**KoT 1.** Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación.
			KoT 2. Conocer el uso de la generalización para construir secuencias con patrones geométricos y/o numéricos.
			KoT 3. Conocer el uso de la generalización para resolver relaciones funcionales.
		Propiedades y sus fundamentos	**KoT 4.** Conocer la propiedad distributiva (propiedad de los números reales)
			KoT 5. Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad.
			KoT 6. Conocer que una expresión algebraica se encuentra conformada por variables y constantes.
			KoT 7. Conocer que una propiedad de la generalización de patrones geométricos es que el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes.
		Registros de representación	**KoT 8.** Conocer que un registro para expresar el proceso generalización es el verbal.
			KoT 9. Conocer que un registro para para expresar el proceso de generalización es el pictórico.
			KoT 10. Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización es el simbólico.
		Definiciones	**KoT 11.** Conocer que el pensamiento algebraico se define como un proceso en el que los alumnos generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de ejemplos particulares, establecen esta generalización a través de la argumentación, y la expresan gradualmente de una forma simbólica apropiada para su edad.
			KoT 12. Conocer que la generalización se define como el proceso que lleva el razonamiento a un nivel en el que la atención ya no se centra en los casos en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones existentes entre ellos para aplicarlo a todos los casos.
			KoT 13. Saber lo que es una secuencia (definición)
			KoT 14. Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización.
			KoT 15. Conocer que una **relación funcional** se **define** como la correspondencia entre dos o más cantidades que covarían.
		Procedimientos	**KoT 16.** Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva.

			KoT 17. Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b\ (b =/0)$.
			KoT 18. Conocer que un procedimiento para identificar un patrón geométrico en una secuencia es a través de la variable de agrupamiento.
			KoT 19. Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó y a casos indeterminados.
			KoT 20. Conocer que un procedimiento para hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos es a través de la inversión del proceso de generalización.
	KSM	*Conexiones de simplificación*	**KSM 1.** Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer o segundo grado de primaria a través del conteo y la agrupación.
			KSM 2. Conocer que la generalización se conecta con el conteo y la agrupación mediante el reconocimiento de patrones.
			KSM 3. Conocer que una relación funcional se conecta con un tema de primero o segundo de primaria a través de problemas aditivos y multiplicativos.
		Conexiones de complejuzación	**KSM 4.** Conocer que las secuencias con patrones geométricos se conectan con el tema de expresiones algebraica a través de las expresiones de generalización.
	KPM	*Prácticas ligadas a una temática en específico*	**KPM 1.** Conocer el rol de la generalización en *Early Algebra*.
			KPM 2. Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.
			KPM 3. Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones.
			KPM 4. Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización.
		Prácticas ligadas a la matemática en general	**KPM 5.** Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.
PCK	**KFLM**	*Teorías de aprendizaje de las matemáticas*	**KFLM 1**. Conocer que una forma de aprendizaje del proceso de generalización es a través de la identificación de patrones.

<table>
<tr><td rowspan="16"></td><td rowspan="5"></td><td></td><td>KFLM 2. Conocer los contenidos matemáticos previos que puede retomar para diseñar una situación y fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico.</td></tr>
<tr><td>Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje</td><td>KFLM 3. Conocer que un error que los estudiantes pueden cometer al generalizar es expresar incorrectamente el patrón identificado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático</td><td>KFLM 4. Conocer que una manera en la que los estudiantes hacen evidente la identificación de un patrón es a través de expresiones como "lo que se repite”.</td></tr>
<tr><td>KFLM 5. Conocer que una manera en la que los estudiantes resuelven situaciones de generalización de patrones lineales es a través de la estrategia aditiva.</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="6">KMT</td><td rowspan="4">Formas de enseñanza</td><td>KMT 1. Conocer la potencialidad que tienen para la enseñanza de la generalización de patrones el uso de la variable de agrupamiento.</td></tr>
<tr><td>KMT 2. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso actividades con patrones.</td></tr>
<tr><td>KMT 3. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de Early Algebra el uso de actividades que favorezcan la generalización como lo son las secuencias con patrones geométricos.</td></tr>
<tr><td>KMT 4. Conocer la potencialidad que tiene en la enseñanza del proceso de generalización el uso de situaciones de variación.</td></tr>
<tr><td>Ejemplos y ayudas</td><td>KMT 5. Conoce que una forma de ayuda para que los estudiantes encuentren la expresión de generalización es identificar los datos variantes e invariantes en la relación.</td></tr>
<tr><td>Recursos y materiales</td><td>KMT 6. Conoce la potencialidad del uso de materiales concretos para favorecer el proceso de generalización.</td></tr>
<tr><td>KMLS</td><td>Resultados de aprendizaje esperado</td><td>KMLS 1. Conoce los Procesos de Desarrollo de Aprendizaje (PDA) del programa 2022 para primer grado y segundo grado que pueden favorecer el desarrollo del proceso de generalización.</td></tr>
</table>

		Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimiental	**KMLS 2.** Conocer que en la fase 3 de la Nueva Escuela Mexicana, se debe ofrecer un primer acercamiento a la modelación, la secuenciación y poder resolver situaciones análogas y nuevas.
		Secuencia de temas	**KMLS 3.** Conocer que los PDA de primer grado y segundo grado tiene secuencia con los PDA de 3ero "identificar y representar **regularidades** presentes en la **naturaleza**".

3.3.2.2. Cuadro de análisis de episodios.

Para realizar los acercamientos de análisis de la información se retoma el modelo de Ribeiro (2008), el cual plantea centrarse en las acciones y cogniciones de los docentes, así como en sus relaciones y el tipo de comunicación utilizada; este modelo revela qué recursos se utilizan, los medios de trabajo, el objetivo específico del profesor en cada momento, el tipo de episodio, los eventos desencadenantes y finales y también las acciones del profesor en cada momento (Ribeiro, 2008). El modelo de Ribeiro (2008) plantea el análisis de episodios de clase, sin embargo para los fines que compete a este estudio, se retoma dicho modelo realizando adaptaciones hacia el análisis de extractos de las respuestas que los profesores antes las actividades.

La estructura del cuadro de análisis contempla, en un primer momento hacer explícito el objetivo general de la actividad y el evento desencadenante que causa el inicio del episodio a analizar; en un segundo momento se coloca un extracto de evidencia de respuesta del profesor y los conocimientos bajo el modelo MTKS sus dominios y subdominios MK (KoT, KSM, KPM), PCK (KFLM, KMT, MKLS), a fin de identificar los conocimientos puestos en acción en la respuesta dada en la evidencia extraída del cuestionario; finalmente se hace explícito el evento de término que marca el cierre del episodio.

Figura 16

Instrumento de análisis.

Descripción del episodio. **Objetivo general:** Identificación del objetivo de la actividad. **Evento desencadenante:** Evento que funciona como causa de inicio del episodio. **Evidencia:** Extracto del cuestionario que deja de manifiesto conocimiento puesto en acción. **Conocimientos:** Identificación de los conocimientos que el profesor pone en acción al enfrentarse a las actividades del cuestionario. *MTSK* **MK (Conocimiento matemático)** KoT Categorías KSM Categorías KPM Categorías **PCK (conocimiento didáctico del contenido)** KFLM Categorías KMT Categorías KMLS Categorías **Justificación:** Argumentos por los cuales se afirma que el conocimiento fue puesto en acción. **Evento de término:** Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

Los registros derivados de este instrumento permitirán identificar los conocimientos que los profesores ponen en acción al resolver las actividades planteadas dentro del cuestionario, ya que se extraeran las evidencias textuales de los cuestionarios y se analizaran a la luz del modelo MTSK.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS

En este capítulo se presenta el análisis de los datos obtenidos. Es importante señalar que, en la aplicación de la sesión 1 no fue posible responder la actividad D, mientras que de la sesión 2 no se respondieron las actividades D y E, lo anterior derivado de que los profesores ocuparon más del tiempo estipulados a las primeras actividades, por lo que no fue posible responder todas. Sin embargo, se considera que esto no afectó a los datos recogidos ya que las actividades que no se respondieron fueron consideradas como complementarias.

De esta forma, el análisis aquí realizado corresponde unicamente a las actividades aplicadas. Para llevar a cabo el análisis se desarrollaron cinco momentos, compuestos por uno preliminar y cuatro acercamiento al análisis (ver figura 1).

En la etapa preliminar se presenta el proceso de organización de los cuestionarios y la revisión general de estos, a fin de obtener una primera asociación de los subdominios bajo el modelo MTSK, así como la primera selección de informantes sobre los cuales se realizará el primer acercamiento al análisis de los datos.

En el primer acercamiento se analizan los episodios de las actividades con la intención de obtener una primera identificación de conocimientos del modelo MTSK.

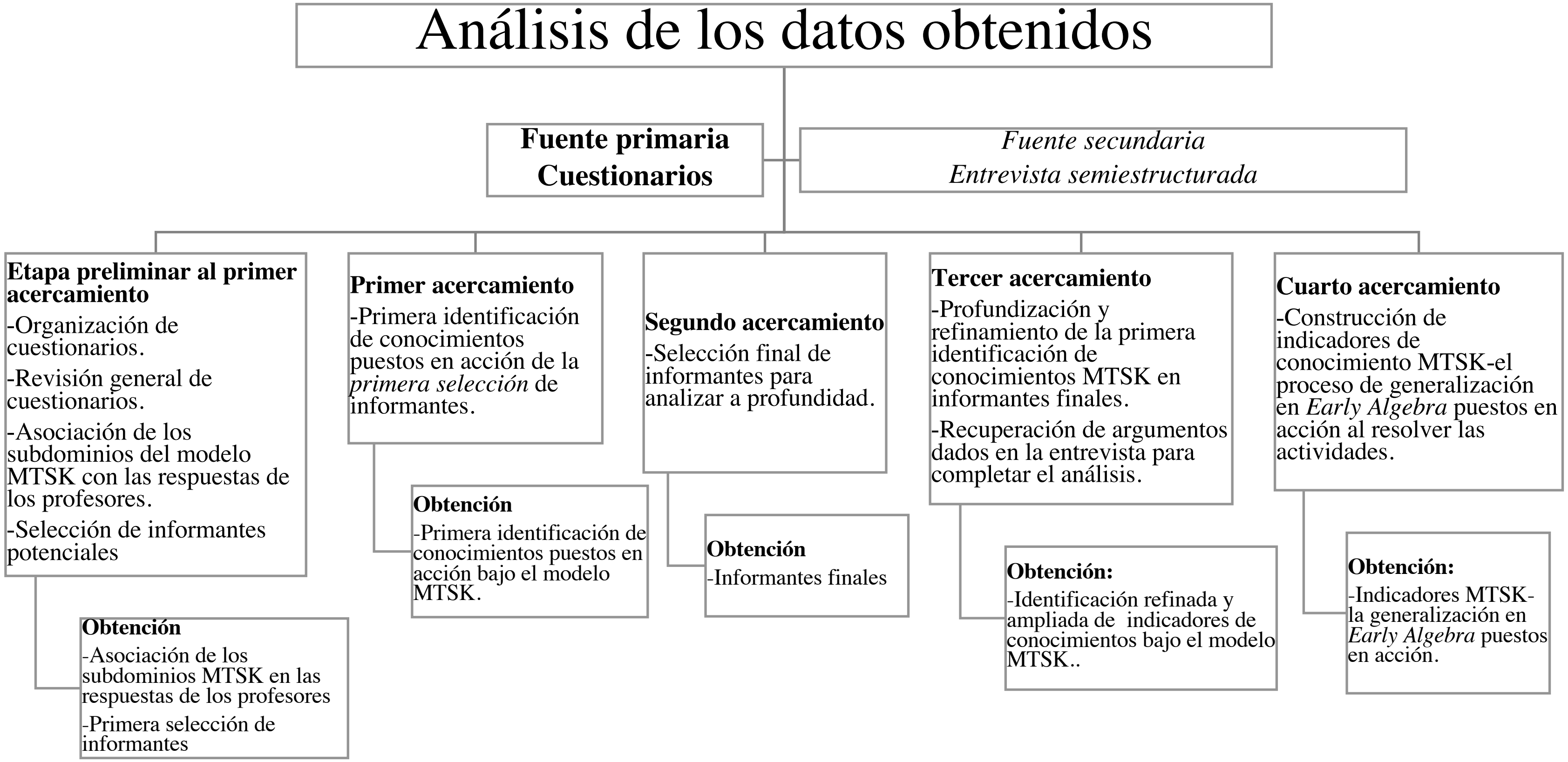
En el segundo acercamiento se revisan los resultados del primer acercamiento con la intención de determinar la selección final de informantes de los que se profundizarán sus respuestas.

En el tercer acercamiento se profundizan y refinan los indicadores de conocimientos identificados en el primer acercamiento. En este acercamiento se profundiza el segundo acercamiento tomando en cuenta algunas respuestas de los profesores a través de la entrevista semiestructurada aplicada a los informantes finales.

Finalmente, en el cuarto acercamiento se construyen los indicadores de conocimiento MTSK-proceso de generalización en *Early Algebra* puestos en acción.

Figura 17

Estructura del análisis de los datos obtenidos en la investigación.



Fuente: elaboración propia

4.1. Etapa preliminar al primer acercamiento al análisis de la información.

En esta etapa se organizaron los instrumentos de recogida de información y se realizó una revisión general de los cuestionarios para obtener:

- Asociación de los subdominios del modelo MTSK en las respuestas y argumentos que los profesores dieron a las actividades.
- Primera selección de informantes potenciales.

4.1.1. Organización de los instrumentos

Los cuestionarios se organizaron de acuerdo con el número de sesiones a las que asistieron. De lo cual se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 4

Concentrado de instrumentos contestados por sesiones.

Indicador Sesiones a las que asistieron	Cantidad
Profesores que asistieron a la sesión 1	9
Profesores que asistieron a la sesión 2	6
Profesores que asistieron a las dos sesiones	**18**

Dado que es de interés analizar las respuestas en los dos momentos de aplicación, la atención se centra en los 18 profesores que asistieron a las dos sesiones. De esta manera, se organizaron los cuestionarios de dichos profesores de acuerdo con el grado que atienden. Teniendo los siguientes datos.

Tabla 5

Concentrado de instrumentos contestados por grado que se atiende.

Indicador Grado que atienden	Cantidad
Profesores que atienden 4to, 5to o 6to grado de primaria	8
Profesores que atienden todos los grados de primaria	**2**
Profesores que atienden 1ero y 2do grado de primaria	**2**
Profesores que atienden 2do grado de primaria	**3**
Profesores que atienden 1er grado de primaria	**3**

De acuerdo con los fines que compete esta investigación, se consideró realizar la revisión general sobre los informantes que hayan asistido a las dos sesiones y que entre los grados que atiendan se encuentren 1ero y/o 2do, teniendo una población de 10 informantes (2 multigrado, 2 que atienden 1er y 2do grado, 3 que atienden 2do grado y 3 que atienden 1er grado). De los cuales se registra la información de años de servicio, sexo y preparación en la siguiente tabla.

Tabla 6

Concentrado de datos de informantes potenciales.

Grados que atienden	Docente	Años de servicio	Sexo	Preparación
1ero	1	19 años	Mujer	Lic. en Educación Primaria
	2	34 años	Mujer	Lic. en Pedagogía
	3	8 años	Hombre	Lic. en Ciencias de la Educación
2do	4	28 años	Mujer	Lic. en Educación
	5	23 años	Mujer	Lic. en Educación Primaria
	6	10 años	Hombre	Lic. en Pedagogía Mtro. en Educación
1ero y 2do	7	1 año	Hombre	Lic. en Educación Básica
	8	1 año	Mujer	Lic. en Pedagogía
Todos los grados	9	1 año	Hombre	Lic. en Pedagogía
	10	8 años	Mujer	Lic. en Pedagogía

4.1.2. Revisión general de los cuestionarios y asociación de los subdominios del modelo MTSK

La revisión general de los cuestionarios se centró en realizar una primera asociación de las respuestas de los profesores con los subdominios del modelo MTSK. Para ello se organizaron los datos recogidos de la siguiente manera.

- *Evidencia de conocimiento*. Registros sobre las que no existen duda que se puede observar un conocimiento del profesor y que puede clasificarse bajo el modelo MTSK.
- *Indicios de conocimiento*. Registros en las que parece percibirse algún conocimiento matemático o didáctico del profesor y que pudiera considerarse parte del MTSK (Flores et al., 2013).
- *Oportunidades de profundizar en el conocimiento*. Registros que permiten especular sobre su aportación a un futuro análisis de los datos (Flores et al., 2013)

Para lo anterior se utilizaron señalizaciones de colores en los cuestionarios en físico. Se empleó el color verde para las evidencias, el amarillo para los indicios y el naranja para las oportunidades. De lo anterior se obtuvieron los resultados que se registran en la siguiente tabla, y en la que se emplearon seudónimos para proteger la identidad de los profesores participantes.

Tabla 7

Concentrado de número de evidencias, indicios y oportunidades de conocimiento en informantes potenciales.

Docente	Conocimientos		
	Evidencia	Indicios	Oportunidades
Ana	18	7	3
Bertha	10	5	2
Carlos	10	4	3
Diana	17	5	3
Ernesto	5	10	2
Fernando	20	5	2
Gerardo	7	8	1
Hernán	5	7	5
Isabel	7	3	5
Julieta	20	4	3

Una vez identificadas evidencias, indicios y oportunidades de conocimientos, éstos se asociaron a los subdominios y categorías, bajo el modelo MTSK, a los que podrían pertenecer con base en la primera revisión general. De lo anterior se obtuvo la siguiente información.

Tabla 8

Concentrado de número de indicadores de conocimiento por dominio y subdominio MTSK.

Docente	MK			PCK		
	KoT	KSM	KPM	KFLM	KMT	KMLS
Ana	17	3	0	3	3	0
Bertha	10	3	1	2	2	0
Carlos	12	2	0	1	2	1
Diana	17	3	0	2	2	1
Ernesto	14	2	0	1	0	0
Fernando	16	3	2	3	2	1
Gerardo	13	2	0	1	0	0
Hernán	15	0	0	1	1	0
Isabel	11	1	0	0	3	0
Julieta	16	2	3	2	4	0

4.1.3. Primera selección de informantes

De la revisión general se obtuvo la primera selección de informantes, para lo cual se tomaron en cuenta los siguientes criterios.

- Número de evidencia o indicio de conocimiento.
- Claridad en los argumentos a las respuestas dadas.
- Identificación de conocimiento en al menos 4 diferentes subdominios.
- Años de servicio.

De lo anterior se tuvieron **6 informantes potenciales** (4 mujeres y 2 hombres), cuyos datos se registran en la siguiente tabla.

Tabla 9

Concentrado de datos de primera selección de informantes.

Grados que atienden	Docente	Años de servicio	Género	Preparación
1ero	Ana	19 años	Mujer	Lic. en Educación Primaria
	Bertha	34 años	Mujer	Lic. en Pedagogía
	Carlos	8 años	Hombre	Lic. en Ciencias de la Educación
2do	Diana	28 años	Mujer	Lic. en Educación
	Fernando	10 años	Hombre	Lic. en Pedagogía Mtro. en Educación
Todos los grados	Julieta	8 años	Mujer	Lic. en Pedagogía

Las respuestas de dichos informantes serán profundizadas en el primer acercamiento al análisis de los datos, en el cual se podrán analizar a detalles los resultados y argumentos a fin de identificar de forma puntual al dominio o subdominio que pertenecen.

4.2. Primer acercamiento al análisis de datos

A continuación, se presenta el primer acercamiento del análisis de los cuestionarios aplicados a los seis informantes potenciales, de lo cual se obtendrá una primera identificación de indicadores de conocimientos bajo el modelo MTSK.

4.2.1. Primera identificación de conocimientos

Para llevar a cabo la primera identificación de conocimientos se organiza la información por profesor, revisando las respuestas dadas en las actividades realizadas en cada una de las dos sesiones. Dado, que como se señaló en un inicio, no fue posible contestar todas las actividades contempladas en el instrumento diseñado, derivado del tiempo con el que se contó por sesión, a continuación se desglosan las actividades que fueron resueltas.

Tabla 10

Actividades resueltas por primera selección de informantes.

Sesiones	Actividades
Generalización en patrones	A.Para mí el pensamiento algebraico es…
	B. ¿Tiene sentido?
	C. Completemos el bordado
	E. El proceso de generalización de patrones
Generalización en relaciones funcionales	A. Para mí la relació funcional es…
	B. ¿Qué escucho?
	C. ¿Cuántos globos para cada invitado?
	F. Diseñando una situación

Se recuperaron las evidencias o indicios de conocimientos de los seis informantes potenciales obtenidos de la revisión general, a fin de ser revisados a través del instrumento de análisis de información presentado en el capítulo de metodología.

Dado que en el tercer acercamiento se realiza un refinamiento de la identificación de los conocimientos sobre los informantes finales, en este apartado se coloca únicamente un ejemplo a modo de tener una mayor claridad de lo realizado en el primer acercamiento, presentando todos los instrumentos en el tercer acercamiento.

Sesión 1

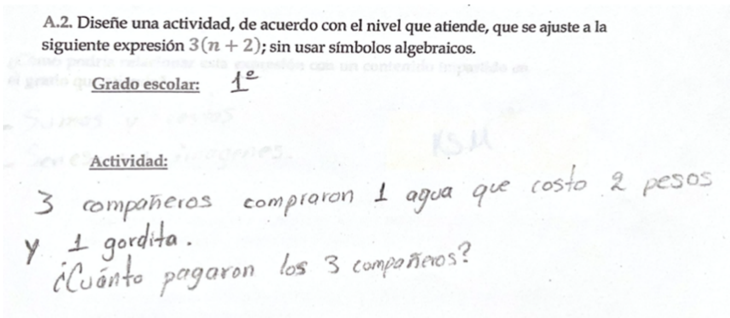
Análisis de Actividad A de la Sesión 1 de profesora Ana.

Responder Actividad A. Para mí el pensamiento algebraico es…

Objetivo general: Recuperar el conocimiento previo que los profesores tienen sobre pensamiento algebraico y generalización. Recuperar el conocimiento que los profesores de ponen en acción al diseñar una actividad que permita conectar una relación algebraica con el contenido que desarrollan en el grado que atienden.

Evento desencadenante: Comenzar la aplicación del cuestionario interrogando a los participantes respecto a sus concepciones previas sobre pensamiento algebraico y generalización. Para ello se plantean las preguntas ¿qué es el pensamiento algebraico? ¿qué habilidades deben promoverse en los estudiantes para contribuir en el desarrollo del pensamiento algebraico? y, ¿qué es la generalización?

Evidencia [1, A.2, a]



A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $3(n+2)$; sin usar símbolos algebraicos.

Grado escolar: 1º

Actividad:

3 compañeros compraron 1 agua que costo 2 pesos y 1 gordita.
¿Cuánto pagaron los 3 compañeros?

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Fenomelogía
Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es através de modelar una situación de problemas aditivos y multiplicativos con una variable.

Justificación
Refleja fenomenológicamente una expresión algebraica con el cálculo de costos cuando se desconoce el valor de uno de los elementos.

KoT
Propiedades y sus fundamentos
Conocer la propiedad distributiva.

Descripción
Plantea una situación respetando la propiedad distributiva de la expresión algebraica.

KSM
Conexiones de simplificación
Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de los problemas aditivos con una variable.

Justificación
Conecta una expresión algebraica con el tema problemas aditivos abordado en primer grado. El planteamiento de este tipo de problemas permite desarrollar un proceso de generalización que lleva a construir una expresión o proceso que modele la situación. En la entrevista este indicador se refuerza al identificar que la profesora al expresar que una expresión algebraica puede tener sentido cuando se plantean problemas de suma y resta donde existe un valor desconocido.

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

4.3. Segundo acercamiento al análisis de datos

4.3.1. Selección de informantes finales

En el segundo acercamiento se realiza la selección final de informantes para analizar a profundidad. Toda vez que se contó con la primera identificación de indicadores de conocimiento bajo el modelo MTSK en la primera selección de informantes, se buscó aprovechar al máximo aquellos indicadores que brindaban más información a los objetivos de la investigación.

Por lo anterior se realizó una revisión sobre la primera identificación de indicadores de conocimiento, obtenida en el primer acercamiento, y se tomaron en cuenta los siguientes aspectos para determinar los informantes finales.

- Identificación de indicadores de conocimiento en al menos 4 diferentes subdmonios.
- Identificación de indicadores de conocimientos que evidencien el proceso de generalización.
- Extensión pertinente en los argumentos, lo que permite profundizar en su conocimiento.
- Operaciones o anotaciones complementarias, lo que favorece indagar a mayor profundidad en sus conocimientos.
- Tener experiencia en los grados de primero o segundo.

De esta manera la selección de informantes finales se encuentra constituido por tres profesores con las siguientes características.

Tabla 11

Datos de la selección de informantes finales.

Grados que atienden	Docente	Años atendiendo primer o segundo grado	Años de servicio	Género	Preparación
1ero	Ana	7 años	19 años	F	Lic. en Educación Primaria
2do	Fernando	6 años	10 años	M	Lic. en Pedagogía Mtro. en Educación
Todos los grados	Julieta	5 años	8 años	F	Lic. en Pedagogía

4.4. Tercer acercamiento al análisis de datos

En el tercer acercamiento del análisis se profundizan los conocimientos bajo el modelo MTSK identificados en el primer acercamiento de los tres profesores que constituyen la selección final de informantes.

Se profundizan en las respuestas dadas al cuestionario con actividades *Early Algebra* y se retoma la entrevista semiestructurada, con la que se buscó detallar aspectos de algunas de las respuestas dadas. Se fortalece el cuadro de análisis y en el aparto de justificación se indica el fragmento de la entrevista que apoya a la misma, solo en los casos donde se empleó la entrevista. Para ello se coloca al final de la justificación un identificador en color azul en el que se coloca la parte de la entrevista que se retoma (p), las líneas donde se encuentra el argumento (l), y el informante (i), (p, l, i).

Por ejemplo, la siguiente justificación del conocimiento identificado se respalda con la parte 1, líneas 10 y 11 de la entrevista realizada al informante a. Para mayor profundidad las transcripciones de las entrevistas se encuentran en los anexos 5, 7 y 9.

Figura 18

Estructura de justificación basada en entrevista.

KSM *Conexiones de simplificación* Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de secuencias con patrones geométricos y problemas aditivos con una variable. **Justificación** Conecta una expresión algebraica con un tema abordado en primer grado como lo son los problemas aditivos donde existe una variable o secuencias con patrones geométricos, que la profesora expresa como "series con imágenes" (1, 10-11, a).

Este tercer acercamiento tiene la intención de obtener una identificación refinada y ampliada de los indicadores de conocimiento bajo el modelo MTSK encontrados en el primer acercamiento sobre los tres informantes finales.

4.4.1. Identificación profundizada y ampliada de los conocimientos puestos en acción de los informantes finales

4.4.1.1. Identificación profundizada y ampliada de los conocimientos de la profesora Ana.

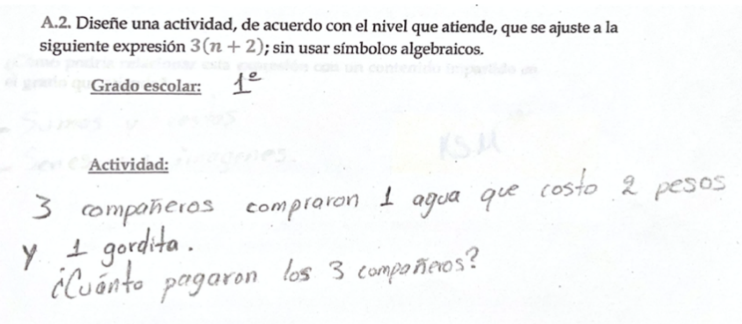
SESIÓN 1

Análisis de Actividad A de la Sesión 1 de profesora Ana.

Responder Actividad A. Para mí el pensamiento algebraico es…
Objetivo general: Recuperar el conocimiento previo que los profesores tienen sobre pensamiento algebraico y generalización. Recuperar el conocimiento que los profesores de ponen en acción al diseñar una actividad que permita conectar una relación algebraica con el contenido que desarrollan en el grado que atienden.

Evento desencadenante: Comenzar la aplicación del cuestionario interrogando a los participantes respecto a sus concepciones previas sobre pensamiento algebraico y generalización. Para ello se plantean las preguntas ¿qué es el pensamiento algebraico? ¿qué habilidades deben promoverse en los estudiantes para contribuir en el desarrollo del pensamiento algebraico? y, ¿qué es la generalización?

Evidencia [1, A.2, a]


A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $3(n + 2)$; sin usar símbolos algebraicos.

Grado escolar: 1º

Actividad:

3 compañeros compraron 1 agua que costo 2 pesos y 1 gordita.
¿Cuánto pagaron los 3 compañeros?

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Fenomelogía
Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación dependiente de problemas aditivos y multiplicativos.

Justificación
Refleja fenomenológicamente una expresión algebraica con el cálculo de costos cuando se desconoce el valor de uno de los elementos.

KoT
Propiedades y sus fundamentos
Conocer la propiedad distributiva.

Justificación
Plantea una situación respetando la propiedad distributiva de la expresión algebraica. La profesora plantea una situación donde estudiantes tres estudiantes compran los mismo (un agua con un costo fijo de 2 pesos y una gordita de la que se desconoce el valor) y se quiere saber cuánto pagaran en total los tres compañeros juntos (1, 6-7, a).

KSM
Conexiones de simplificación
Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de los problemas aditivos con una variable.

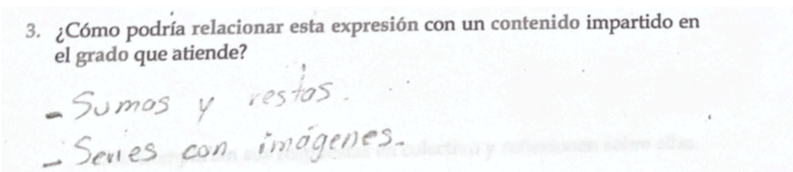
Justificación
Conecta una expresión algebraica con el tema problemas aditivos abordado en primer grado. Le da sentido a la expresión con un problema de suma donde existe un valor desconocido (1, 8-9, a).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

Análisis de Actividad B de la Sesión 1 de profesora Ana.

Responder Actividad B. ¿Tiene sentido?
Objetivo general: Analizar la posibilidad de darle sentido a una expresión algebraica a partir de contextos o situaciones cercanas a los estudiantes.
Evento desencadenante: Presentar a los profesores la expresión algebraica $6n - 2\ (n - 1)$ y cuestionarlos respecto a si está tiene o no sentido para los estudiantes del grado que atienden y de qué manera puede relacionarse con un contenido impartido en el grado que atienden.

Evidencia [1, B.1.3, a]


3. ¿Cómo podría relacionar esta expresión con un contenido impartido en el grado que atiende?
- Sumos y restas.
- Series con imágenes.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)

KSM
Conexiones de simplificación
Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de secuencias con patrones geométricos y problemas aditivos con una variable.

Justificación

Conecta una expresión algebraica con un tema abordado en primer grado como lo son los problemas aditivos donde existe una variable o secuencias con patrones geométricos, que la profesora expresa como “series con imágenes” (1, 10-11, a).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

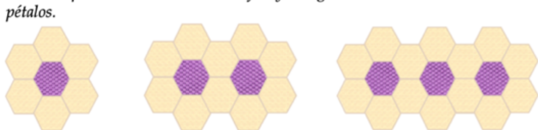
Análisis de Actividad C de la Sesión 1 de profesora Ana.

Responder Actividad C. Completemos el bordado

Objetivo general: Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la resolución y análisis de una secuencia con patrón geométrico para identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

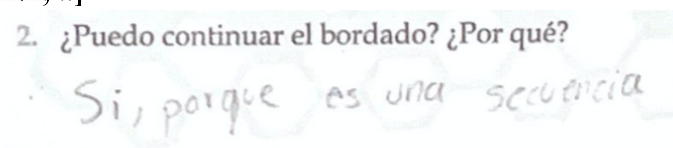
Evento desencadenante: Presentar a los profesores la secuencia con un patrón geométrico que se muestra a continuación.

*La siguiente imagen representa un **bordado de flores** formado con hexágono morado representando el centro de la flor y hexágonos amarillos alrededor como pétalos.*



Y analizar la posibilidad de continuar su construcción a fin de realizar un proceso de generalización.

Evidencia [1, C.2.2, a]


2. ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?

Si, porque es una secuencia

Conocimientos en acción

MK(Conocimiento Matemático)

KoT

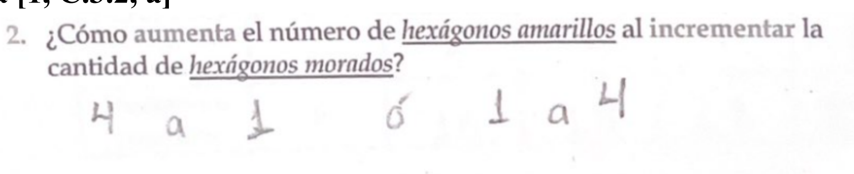
Definición

Saber lo que es una secuencia (definición)

Justificación

Identifica que la imagen que observa corresponde a una secuencia, lo que da cuenta del conocimiento que tiene sobre la definición de este concepto. Para la docente la secuencia representa "una continuidad de algo que va ordenado” (1, 12-13, a).

Evidencia [1, C.3.2, a]


2. ¿Cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morados?

4 a 1 ó 1 a 4

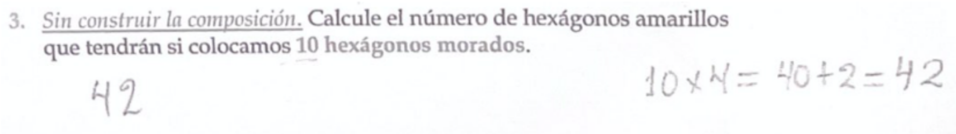
Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Propiedades y sus fundamentos
Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad

Justificación
Identifica que el crecimiento de la secuencia está dado por la regularidad o patrón “4 a 1” o “1 a 4” (1, 14-15, a).

KoT
Registros de representación
Saber expresar la relación entre el número de elementos de un término de una secuencia y su posición a través de un registro simbólico.

Justificación
Expresa la relación entre la cantidad de hexágonos amarillos y morados a través de un registro simbólico que evidencia el patrón de crecimiento de la secuencia.

Evidencia [1, C.3.3, a]


3. Sin construir la composición. Calcule el número de hexágonos amarillos que tendrán si colocamos 10 hexágonos morados.
42
10 x 4 = 40 + 2 = 42

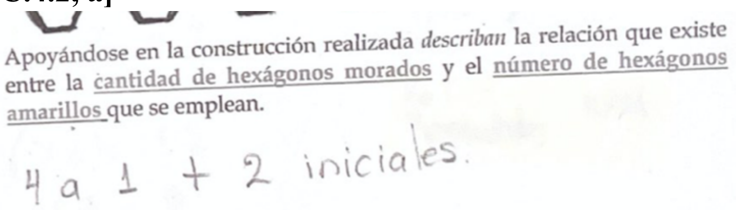
Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimientos
Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b\ (b \neq 0)$.

Justificación
Encuentra el número de elementos de un término en una secuencia, sin construir la figura, realizando una operación de tipo $an + b$, tomando como base el patrón identificado (1, 16-17, a).

KoT
Procedimientos
Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón y extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.

Justificación
Traslada la regularidad o patrón identificado a un caso distinto al que originó el razonamiento. Identifica que el crecimiento es que aumenta en 4 entonces multiplica éste crecimiento por 10, que es la posición de la secuencia que nos interesa, y le suma 2 porque son 2 hexágonos que quedan fueran de la agrupación de 4 a en 4. Este dos siempre se tendrá de suma sin importar la posición, pues son 2 hexágono iniciales de la secuencia (1, 16-17, a).

Evidencia [1, C.4.2, a]

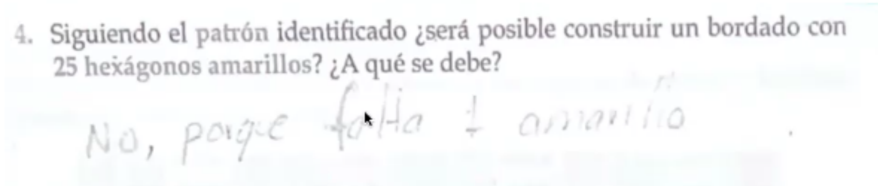

Apoyándose en la construcción realizada *describan* la relación que existe entre la cantidad de hexágonos morados y el número de hexágonos amarillos que se emplean.

4 a 1 + 2 iniciales.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registros
Saber expresar la relación entre el número de elementos de un término de una secuencia y su posición a través de un registro simbólico.

Justificación
Expresa la generalización de la situación a través de una expresión simbólica donde se manifiesta el patrón identificado.

Evidencia [1, C.4.4, a]

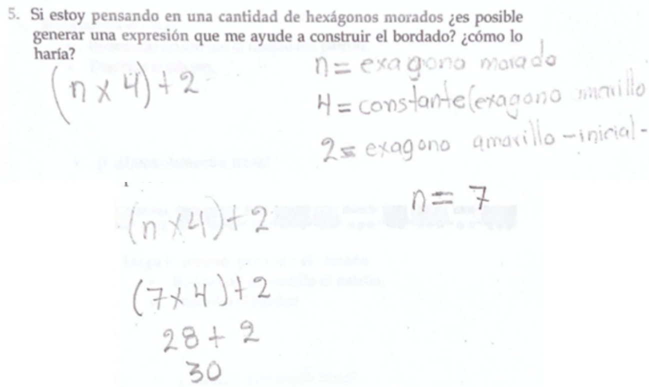

4. Siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿A qué se debe?

No, porqe falta 1 amarillo

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KPM
Prácticas ligadas a una temática en específico
Conocer que una estrategia heurística para hacer una inversión del proceso en la generalización de patrones es darle asignar valores a *n* para acercarse a $f(n)$.

Justificación
La profesora manifiesta que llega a esa conclusión por que busca un número que multiplicado por 4 se acerque a 25, por lo que multiplica 4 por 6 teniendo 24, pero como se suman los 2 del inicio el resultado es 26. De este proceso concluye que no se puede formar la secuencia con 25 hexágonos amarillos, porque falta 1 amarillo (1, 18-19, a).

Evidencia [1, C.4.5, a]


5. Si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados ¿es posible generar una expresión que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría?

(n x 4) + 2

n= exagono morado
4= constante (exagono amarillo
2= exagono amarillo -inicial-

n= 7

(n x4)+2
(7x 4)+2
28 + 2
30

Conocimientos en acción **MK (Conocimiento matemático)** **KoT** *Procedimiento* Conocer que un procedimiento para construir una expresión de generalización es identificar el patrón de crecimiento y determinar los valores variantes e invariantes en dicho patrón. **Justificación** Construye una expresión de generalización retomando la regularidad encontrada y determinando los valores variantes e invariantes (1, 20-21, a). **KoT** *Registros* Saber expresar el proceso de generalización a través del registro simbólico. **Justificación** Expresa la generalización de la situación a través de símbolos es decir una expresión simbólica, en la que deje de manifiesto el patrón identificado en las respuestas anteriores. **KPM** *Prácticas ligadas a la matemática en general* Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica. **Justificación** Valida una expresión de generalización, sustituyendo un valor sobre el que ya se conoce el resultado y por tanto si al sustituir este coincide con el que se conoce entonces la expresión es adecuada. **Evento de término:** Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

Análisis de Actividad E de la Sesión 1 de profesora Ana.

Responder Actividad E. El proceso de generalización de patrones **Objetivo general:** Reflexionar cómo es posible favorecer el proceso de generalización en los estudiantes a través de la resolución de secuencias con patrones geométrico. **Evento desencadenante:** Presentar a los profesores preguntas relacionadas con el proceso de generalización de sus estudiantes, cómo pueden favorecerlo y a que dificultades se pueden enfrentar en dicho proceso.

Evidencia [1, E.1, a]

1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones?

Diseñar diversas actividades, tanto lúdicas como concretas para desarrollar habilidades del pensamiento matemático para lograr comprender o deducir los patrones y sus constantes.

Conocimientos en acción
PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT
Formas de enseñanza
Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de actividades lúdicas y concretas donde los estudiantes deduzcan patrones.

Justificación
Reconoce las características que deben tener las actividades de enseñanza para favorecer el proceso de generalización en los estudiantes. Identifica la importancia que tiene trabajar con estudiantes de primero y segundo de primaria conceptos matemáticos a través del material concreto, ya que esto les permite comprenderlos a través de la visualización y la manipulación (1, 22-23, a).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

SESIÓN 2

Análisis de Actividad C de la Sesión 2 de profesora Ana.

Responder Actividad C. ¿Cuántos globos para cada invitado?

Objetivo general: Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la identificación de la relación funcional existente entre las variables involucradas a fin de identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una situación donde se necesita conocer la cantidad de globos que le tocan a cada invitado dada algunas condiciones.

Evidencias [2, C.1.1, a] [2, C.1.2,a]

1. Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué considera que hizo con los globos?

Se multiplica por 3 que son los globos por el número de invitados más el globo de la puerta.

3x3 = 9+1 = 10

2. Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué considera que hizo con los globos?

Se dio 3 globos a cada invitado

6x3 = 18+1 = 19

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es identificar elementos comunes en casos particulares a través de la manipulación aritmética.

Justificación
Deduce la relación entre las variables de una relación funcional por medio del analisis de casos particulares donde las operaciones aritméticas que le permiten encontrar el valor de la variable dependiente dada.

Evidencias [2, C.1.3,a] [2, C.1.4, b]

3. Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?

5x3 = 15+1 = 16 globos

4. Cuando hay 15 invitados, ¿cuántos globos necesita?

15x3 = 45+1 = 46 globos

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar la regularidad y extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.

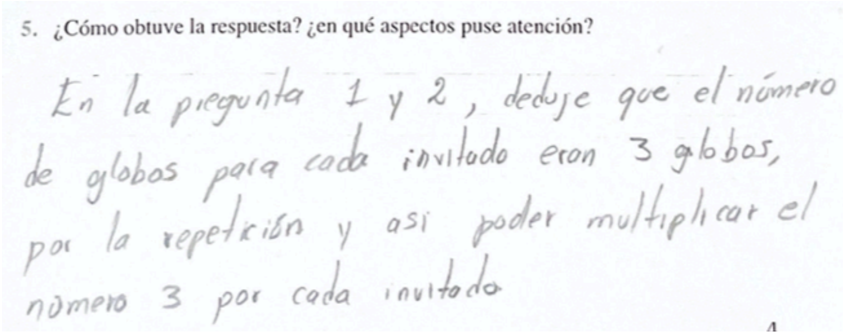
Justificación
Deduce la relación entre las variables de una relación funcional retomando el análisis de los casos particulares y extendiéndolo más allá de los casos que lo originaron.

KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b$ $(b =/0)$.

Justificación

Encuentra la variable dependiente de una relación dada la variable independiente, sustituyendo esta última en una expresión de tipo $f(n) = an + b$ $(b =/0)$ generada en casos particulares.

Evidencias [2, C.1.5,a]



5. ¿Cómo obtuve la respuesta? ¿en qué aspectos puse atención?

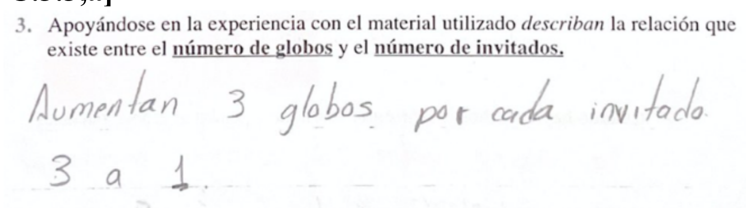
En la pregunta 1 y 2, deduje que el número de globos para cada invitado eran 3 globos, por la repetición y así poder multiplicar el número 3 por cada invitado

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad y extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.
Justificación
Encuentra la relación entre las variables de una función identificando la propiedad común en los casos presentado y la extiende más allá del rango que lo originó. El análisis de los casos particulares le permitió encontrar la regularidad que se repite, en este caso 3 goblos por invitado (2, 26-27, a).

KPM
Prácticas ligadas a una temática en específico
Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.

Justificación
Identifica el papel de la identificación de una propiedad común o regularidad para continuar determinar la relación entre las variables de una función (2, 26-27, a).

Evidencia [2, C.3.3,a]



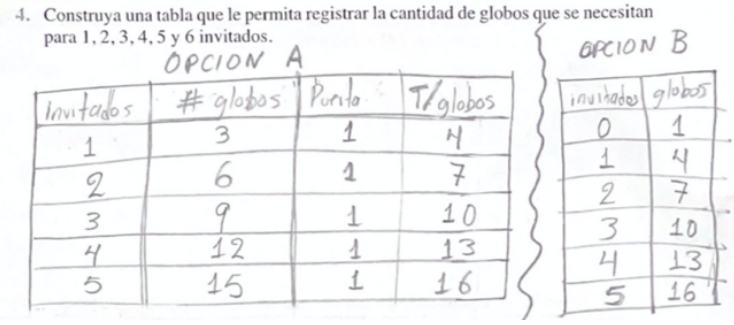
3. Apoyándose en la experiencia con el material utilizado *describan* la relación que existe entre el número de globos y el número de invitados.

Aumentan 3 globos por cada invitado
3 a 1.

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registros de representación
Saber expresar la relación entre las variables de una función a través de un registro simbólico.

Justificación
Expresa la relación entre las variables de la función de manera simbólica y verbal.

Evidencia [2, C.3.4, a]



4. Construya una tabla que le permita registrar la cantidad de globos que se necesitan para 1, 2, 3, 4, 5 y 6 invitados.

OPCION A

Invitados	# globos	Punta	T/globos
1	3	1	4
2	6	1	7
3	9	1	10
4	12	1	13
5	15	1	16

OPCION B

invitados	globos
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16

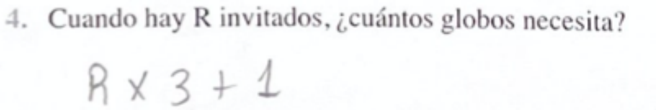
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimientos
Conoce que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es a través del uso de tablas.

Justificación
Identifica la relación entre las variables de una relación funcional por medio recursos gráficos como lo son las tablas de datos donde se hace evidente la relación entre la variable independiente y la variable dependiente de la relación funcional.

Registros de representación
Saber expresar la relación entre las variables de una relación a través de un registro tabular.

Justificación
Emplea el registro tabular para expresar la relación entre las variables de la relación funcional (número de globos y número de invitados).

Evidencia [2, C.4.4, a]



4. Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita?

$R \times 3 + 1$

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registros de representación
Saber expresar la extensión del razonamiento a casos indeterminados en una relación funcional a través del registro simbólico.

Justificación
Extiende un razonamiento de casos determinados a casos indeterminados, expresando la generalizació de una situación a través de los símbolos al sustituir las variables de la situación por literales.

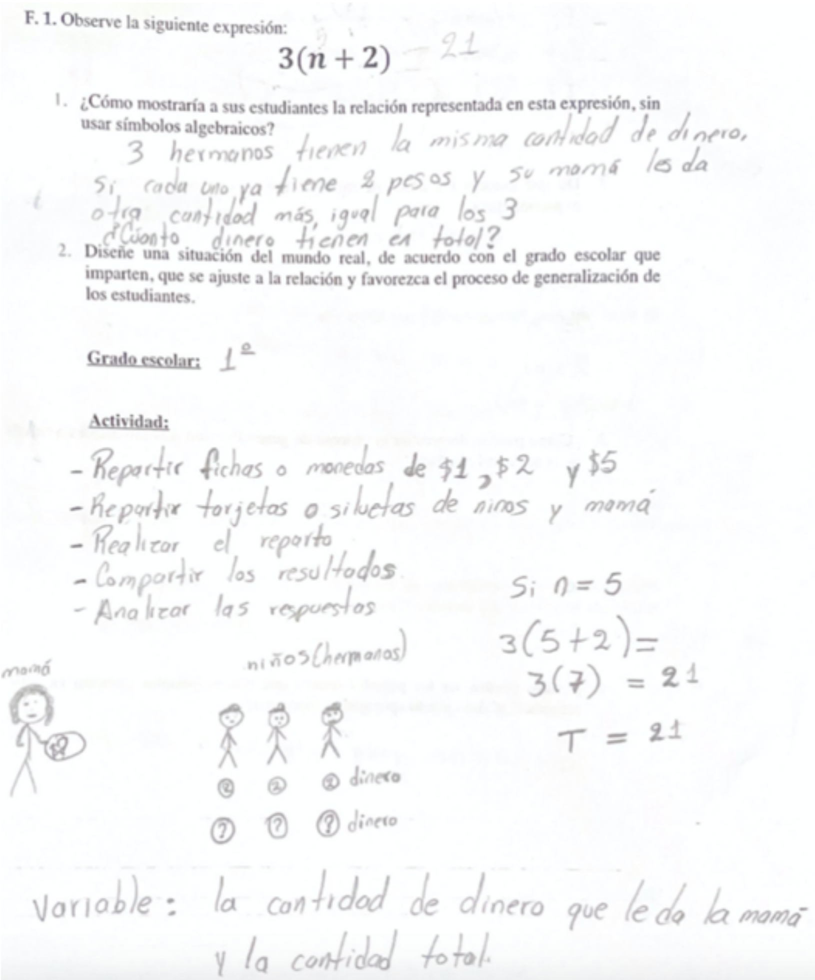
Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

Análisis de Actividad F de la Sesión 2 de profesora Ana.

Responder Actividad F. Diseñando una situación
Objetivo general: Construir una situación acorde al grado escolar que imparten en donde una expresión algebraica tenga sentido para los estudiantes y puedan desarrollar su proceso de generalización.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una expresión algebraica para que a partir de ella construyan una situación cercana a los estudiantes del grado que atienden.

Evidencia [2, F.1.1, a] [2, F.1.2, a]



F. 1. Observe la siguiente expresión:

$$3(n+2) - 21$$

1. ¿Cómo mostraría a sus estudiantes la relación representada en esta expresión, sin usar símbolos algebraicos?

3 hermanos tienen la misma cantidad de dinero, si cada uno ya tiene 2 pesos y su mamá les da otra cantidad más, igual para los 3 ¿Cuánto dinero tienen en total?

2. Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.

Grado escolar: 1°

Actividad:

- Repartir fichas o monedas de \$1, \$2 y \$5
- Repartir tarjetas o siluetas de niños y mamá
- Realizar el reparto
- Compartir los resultados
- Analizar las respuestas

Si $n = 5$

$3(5+2) =$

$3(7) = 21$

$T = 21$

mamá

niños (hermanos)

② dinero

⑦ dinero

Variable: la cantidad de dinero que le da la mamá y la cantidad total.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Fenomelogía
Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación dependiente de problemas aditivos y multiplicativos.

Justificación
Lleva una expresión algebraica a una situación cercana a los estudiantes como lo es el cálculo de dinero obtenido en la que se necesite realizar una suma pero donde se desconoce el valor de uno de los sumandos.

KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para construir una situación en la que una expresión algebraica tenga sentido, es identificar los datos invariantes y variantes en la expresión.

Justificación
Construye una situación partiendo de identificar una relación lo que se mantienen variante e invariantes; por lo que en la situación los elementos variantes se deben expresar como literales; mientras que los datos invariantes como constantes (2, 28-29, a).

KSM
Conexiones de simplificación
Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de problemas aditivos con una variables.

Justificación
Conectar una expresión algebraica con un tema abordado en primer grado como lo son los problemas aditivos donde existe una variable. El planteamiento de este tipo de problemas permite desarrollar un **proceso de generalización** que lleva a construir una expresión que modele la situación.

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT
Recursos y materiales
Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de materiales concretos que puedan dar sentido a las situaciones que involucran una expresión algebraica.

Justificación
Identifica materiales que apoyan en la enseñanza del proceso de generalización al favorecer la comprensión y análisis de una situación a través de la manipulación (2, 30-31, a).

Evidencia [2, F.2.1, a]

F.2. Analice **individualmente** su diseño respondiendo las siguientes preguntas.
1. ¿Qué aspectos consideré para construir la situación?

- El entorno de los niños
- Los conocimientos previos
- El nivel de conocimientos númericos

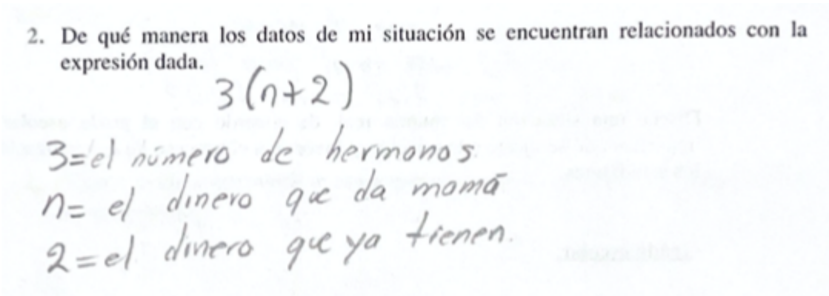
Conocimientos en acción
PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KFLM
Teorías de aprendizaje
Conocer los contenidos matemáticos previos que puede retomar para diseñar su situación y fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico.

Justificación
Identifica los contenidos matemáticos, tales como el conocimiento de los números, que favorezcan diseño de una situación para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico (2, 32-33, a).

KMT
Formas de enseñanza
Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de contextos cercano a los estudiantes donde una expresión algebraica adquiera sentido.

Justificación
Identifica contextos cercanos a los estudiantes para favorecer la enseñanza y entendimiento situaciones que involucran el proceso de generalización.

Evidencia [2, F.2.2, a]


2. De qué manera los datos de mi situación se encuentran relacionados con la expresión dada.

$3(n+2)$

3= el número de hermanos
n= el dinero que da mamá
2= el dinero que ya tienen.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento Matemático)
KoT
Propiedaes y sus fundamentos
Conocer que una expresión algebraica se encuentra conformada por variables y constantes.

Justificación
Para construir la situación identifica en la expresión algebraica las constantes y variables.

Evento de término: Se comenta de manera general la experiencia que tuvieron los profesores al diseñar una actividad partiendo de una expresión algebraica.

4.4.1.2. Identificación profundizada y ampliada de los conocimientos del profesor Fernando.

SESIÓN 1

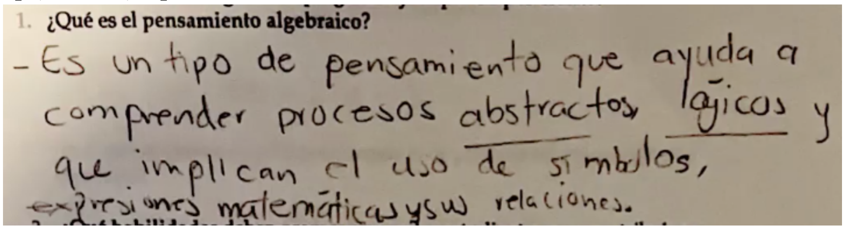
Análisis de Actividad A de la Sesión 1 de profesor Fernando.

Responder Actividad A. Para mí el pensamiento algebraico es…

Objetivo general: Recuperar el conocimiento previo que los profesores tienen sobre pensamiento algebraico y generalización. Recuperar el conocimiento que los profesores de ponen en acción al diseñar una actividad que permita conectar una relación algebraica con el contenido que desarrollan en el grado que atienden.

Evento desencadenante: Comenzar la aplicación del cuestionario interrogando a los participantes respecto a sus concepciones previas sobre pensamiento algebraico y generalización.

Evidencia [1, A.1.1, b]

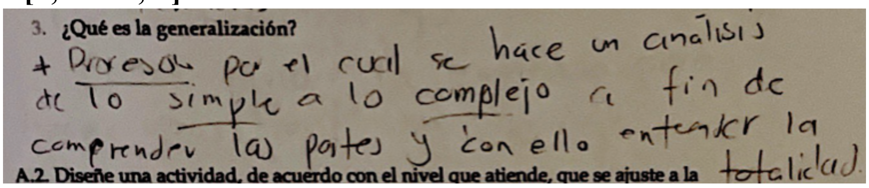

1. ¿Qué es el pensamiento algebraico?

- Es un tipo de pensamiento que ayuda a comprender procesos abstractos lógicos y que implican el uso de símbolos, expresiones matemáticas y sus relaciones.

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Definición
Conocer que la definición de pensamiento algebraico conlleva la designación simbólica de sus objetos, la manera específica de nombrarlos o referir a ellos.

Justificación
Identifica a la designación símbolica de los objetos como un elemento importante del concepto de pensamiento algebraico (1, 6-7, b).

Evidencia [1, A.1.3, b]

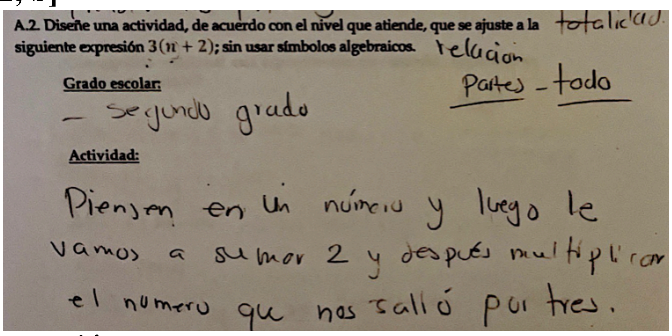

3. ¿Qué es la generalización?

+ Proceso por el cual se hace un análisis de lo simple a lo complejo a fin de comprender las partes y con ello entender la totalidad.

A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Definición
Conocer que una forma de definir la generalización es como el proceso por el cual se hace un análisis de lo simple a lo complejo.

Justificación
Menciona elementos importantes que definen el concepto de generalización, tal como *"ir de lo simple a lo complejo", "comprender la totalidad".*
Evidencia [1, A.2, b]


A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $3(n + 2)$; sin usar símbolos algebraicos.

totalidad.

relación

Partes - todo

Grado escolar:

- segundo grado

Actividad:

Piensen en un número y luego le vamos a sumar 2 y después multiplicar el número que nos salió por tres.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)

KoT
Fenomelogía
Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación dependiente de problemas aditivos y multiplicativos.

Justificación
Refleja fenomenológicamente una expresión algebraica en primer grado de primaria a través de operaciones artiméticas con una variable. Plantea una situación en la que se deben realizar operaciones partiendo de dar *cualquier valor* (la variable) a uno de los sumandos de la operación (1, 8-9, b).

KoT
Propiedades y sus fundamentos
Conocer la propiedad distributiva.

Justificación
Plantea una situación respetando la propiedad distributiva de la expresión algebraica.

KSM
Conexiones de simplificación
Conocer que una expresión algebraica se puede conecta con un tema de segundo de primaria a través de problemas aditivos con una variable.

Justificación
Conecta una expresión algebraica con un tema de primer grado, al construir a partir de una expresión algebraica una situación de operaciones aritméticas básicas donde el valor que se desconoce puede tomar cualquier valor (1, 12-13, b).

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT
Formas de enseñanza
Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de un lenguaje comprensible para el nivel en el que se encuentra.

Justificación
Emplea palabras que los estudiantes de segundo grado puedan comprender para realizar el proceso indicado (1, 10-11, b).

KMLS
Resultados de aprendizaje esperado
Conocer que de acuerdo al programa de estudios 2017 para primer grado los estudiantes deben "resolver problemas que implican hacer sumas y restas" y "solucionar problemas que implican hacer multiplicaciones de un dígito".

Justificación
Emplea los aprendizajes esperados del plan de estudios 2017 de ese grado para plantear la situación planteada (1, 10-11, b).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

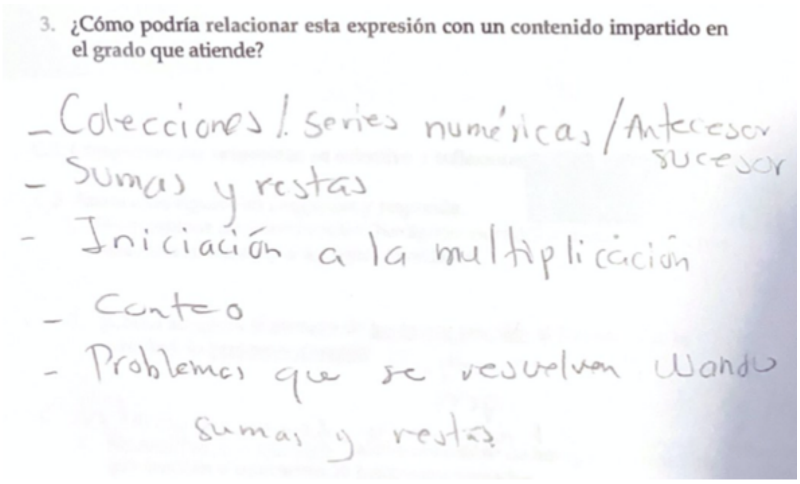
Análisis de Actividad B de la Sesión 1 de profesora Fernando.

Responder Actividad B. ¿Tiene sentido?

Objetivo general: Analizar la posibilidad de darle sentido a una expresión algebraica a partir de contextos o situaciones cercanas a los estudiantes.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores la expresión algebraica $6n - 2\ (n - 1)$ y cuestionarlos respecto a si está tiene o no sentido para los estudiantes del grado que atienden y de qué manera puede relacionarse con un contenido impartido en el grado que atienden.

Evidencia [1, B.1.3, b]


3. ¿Cómo podría relacionar esta expresión con un contenido impartido en el grado que atiende?

- Colecciones / series numéricas / Antecesor sucesor
- Sumas y restas
- Iniciación a la multiplicación
- Conteo
- Problemas que se resuelvan cuando sumas y restas

KSM

Conexiones de simplificación

Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de secuencias numéricas, problemas aditivos y multiplicación y el conteo.

Justificación

Conecta una expresión algebraica con un tema de primer grado al identificar a los problemas aditivos y las secuencias como temas potenciales para establecer dicha conexión (1, 14-15, b).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

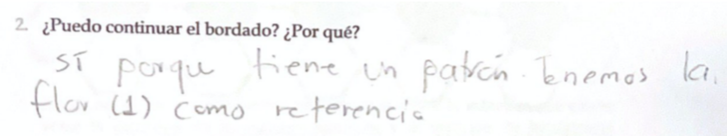
Análisis de Actividad C de la Sesión 1 de profesor Fernando.

Responder Actividad C. Completemos el bordado

Objetivo general: Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la resolución y análisis de una secuencia con patrón geométrico para identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una secuencia con un patrón geométrico y analizar la posibilidad de continuar su construcción a fin de realizar un proceso de generalización.

Evidencia [1, C.2.2, b]


2. ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?

Sí porque tiene un patrón. Tenemos la flor (1) como referencia

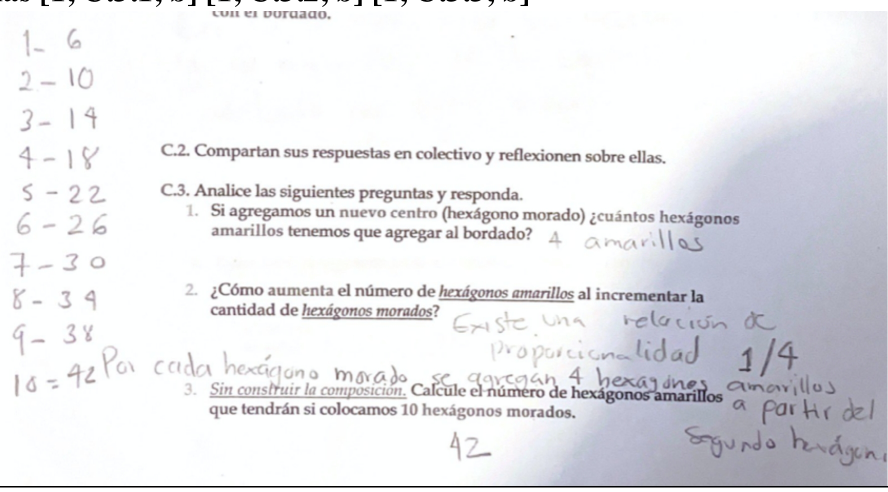
Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Definiciones
Saber lo que es un patrón (definición*)* desde la generalización.

Justificación
Reconoce que el patrón es aquello que se repite, es decir la regularidad de la secuencia (1, 16-17, b).

KPM
Practicas ligadas a un temática en específico
Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización de patrones.

Justificación
Identifica el papel de la identificación de una propiedad común o regularidad para continuar con una secuencia en el contexto de generalización de patrones (1, 18, b).

Evidencias [1, C.3.1, b] [1, C.3.2, b] [1, C.3.3, b]


con el bordado.

1- 6
2 - 10
3 - 14
4 - 18
5 - 22
6 - 26
7 - 30
8 - 34
9 - 38
10 = 42

C.2. Compartan sus respuestas en colectivo y reflexionen sobre ellas.

C.3. Analice las siguientes preguntas y responda.

1. Si agregamos un nuevo centro (hexágono morado) ¿cuántos hexágonos amarillos tenemos que agregar al bordado? 4 amarillos

2. ¿Cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morados? Existe una relación de proporcionalidad 1/4

Por cada hexágono morado se agregan 4 hexágonos amarillos a partir del segundo hexágono

3. Sin construir la composición. Calcule el número de hexágonos amarillos que tendrán si colocamos 10 hexágonos morados.

42

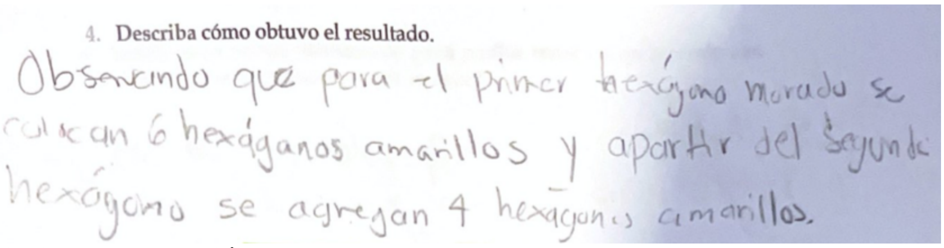
Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimientos
Conocer que un procedimiento para generalizar una secuencia es a través de estrategias proporcionales.

Descripción
Establece una relación de proporcionalidad directa entre las variables para hacer explícito el patrón recurrente a partir del segundo término (1, 19-20, b).

KoT
Procedimientos
Conocer que un procedimiento para encontrar el número de elementos de un término de una secuencia es a través de la aproximación recursiva.

Justificación
Encuentra el número de elementos de un término dado de una secuencia a través de la aproximación recursiva, es decir utilizando el método de conteo más o menos sofisticado, ya que registra la cantidad de elementos término a término, sumando de 4 en 4, hasta llegar al que se solicita.

Evidencia [1, C.3.4, b]


4. Describa cómo obtuvo el resultado.
Observando que para el primer hexágono morado se colocan 6 hexáganos amarillos y apartir del segundo hexágono se agregan 4 hexágonos amarillos.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registros
Saber expresar el proceso de generalización en patrones a través de un registro verbal.

Justificación
Expresa verbalmente el patrón identificado en la secuencia.

KPM
Practicas ligadas a un temática en específico
Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización de patrones.

Justificación
Usa una propiedad común o regularidad para continuar con una secuencia en el contexto de generalización de patrones.

Evidencia [1, C.4.4, b]

4. Siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿A qué se debe?

No es posible, pue la cantidad de amarillos sigue una proporcionalidad y este deberia ser 26.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para encontrar la posición de un término de una secuencia dado el número de elementos es a través de la aproximación recursiva.

Justificación
El profesor recurre al procedimiento realizado en C.3 (aproximación recursiva) para responder esta pregunta (1, 23-24, b).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

Análisis de Actividad E de la Sesión 1 del profesor Fernando

Responder Actividad E. El proceso de generalización de patrones

Objetivo general: Reflexionar cómo es posible favorecer el proceso de generalización en los estudiantes a través de la resolución de secuencias con patrones geométrico.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores preguntas relacionadas con el proceso de generalización de sus estudiantes, cómo pueden favorecerlo y a que dificultades se pueden enfrentar en dicho proceso.

Evidencia [1, E.1.1, b]

E. 1. A partir de la actividad realizada responda.
1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones?

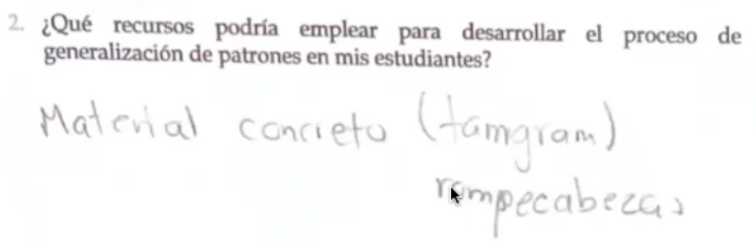
- Mediante actividades en las cuales debe hacer inferencias, raconamiento.

Conocimientos en acción
PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT

Formas de enseñanza
Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de actividades de inferencia, donde los estudiantes deduzcan las relaciones entre los elementos.

Justificación
Reconoce la importancia de plantear actividades a los estudiantes donde se potencie la observación y la inferencia de relaciones entre los elementos de una situación (1, 25-26, b).

Evidencia [1, E.1.2, b]


2. ¿Qué recursos podría emplear para desarrollar el proceso de generalización de patrones en mis estudiantes?

Material concreto (tangram)
rompecabezas

Conocimientos en acción
PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT
Recursos y materiales
Conocer la potencialidad del uso de materiales concretos como el tangram y los rompecabezas para favorecer el proceso de generalización con patrones geométricos.

Justificación
Reconoce que por la etapa de desarrollo cognitivo que se encuentran los estudiantes el uso de material concreto apoya en la identificación de relaciones en secuencias con patrón geométrico (1, 25-27, b).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

SESIÓN 2

Análisis de Actividad B de la Sesión 2 de profesor Fernando.

Responder Actividad B. ¿Qué escucho?

Objetivo general: Identificar el proceso de generalización que realizaron al reproducir las melodías; así como enlazar ese proceso que vivenciaron ellos con el que enfrentan sus estudiantes a fin de ayudar a su desarrollo.

Evento desencadenante: Reproducir tres melodías a los profesores a fin de continuar con ellas.

Evidencia [2, B.1.1, b]

B.1. Escuche la medoldía que reproducirá su facilitador y responda.

1. ¿Fue posible reproducirla de la manera correcta? ¿a qué se debe?

Sí, pues identifiqué el patrón o las secuencias de sonidos.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para continuar una secuencia es identificar el patrón de crecimiento o regularidad de la secuencia.

Justificación
Identifica el patrón o regularidad de una secuencia para continuar su construción, al expresar que para poder continuar con la melodía fue necesario identificar el patrón de sonidos (profundizado en entrevista).

KPM
Prácticas ligadas a un temática en específico
Conocer el papel de tomar conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.

Justificación
Identifica que tomar conciencia de una propiedad común permite continuar con un secuencia (en este caso melodica).

Evidencia [2, B.1.2, b]

B.2. Analice la experiencia y reflexione

1. ¿Cómo favorecería el proceso de generalización en los estudiantes a partir de este tipo de experiencia?

Asignando consignas o actividades donde deban identificar regularidades, o patrones de movimiento, color, forma o sonido.

Conocimientos en acción
PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KFLM
Teorías de aprendizaje de las matemáticas
Conocer la potencialidad que tiene para el aprendizaje del proceso de generación la identificación de patrones musicales, visuales y de movimiento.

Justificación
Reconoce la potencialidad que tiene para el aprendizaje de la generalización reconocer patrones musicales ya que expresa que una forma de favorecer el proceso de generalización en los estudiantes es a través de identificar patrones de movimiento y sonido (2, 30-31, b).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

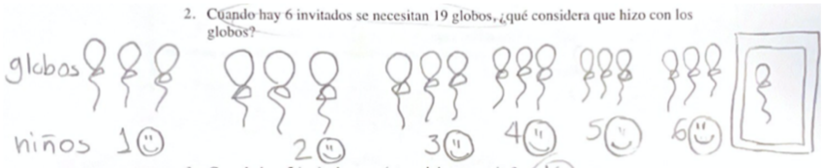
Análisis de Actividad C de la Sesión 2 de profesor Fernando

Responder Actividad C. ¿Cuántos globos para cada invitado?

Objetivo general: Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la identificación de la relación funcional existente entre las variables involucradas a fin de identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una situación donde se necesita conocer la cantidad de globos que le tocan a cada invitado dada algunas condiciones.

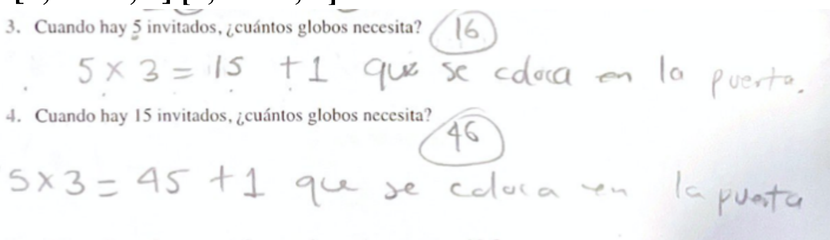
Evidencia [2, C.1.2, b]



Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es a través de la aproximación recursiva.

Justificación
Encuentra la relación entre las variables de la función a través de la aproximaxión recursiva, utilizando el método de conteo más o menos sofisticado, ya que reparte los elementos tomando en cuenta las condiciones de la situación.

Evidencias [2, C.1.3, b] [2, C.1.4, b]



MK (Conocimiento matemático)
KoT

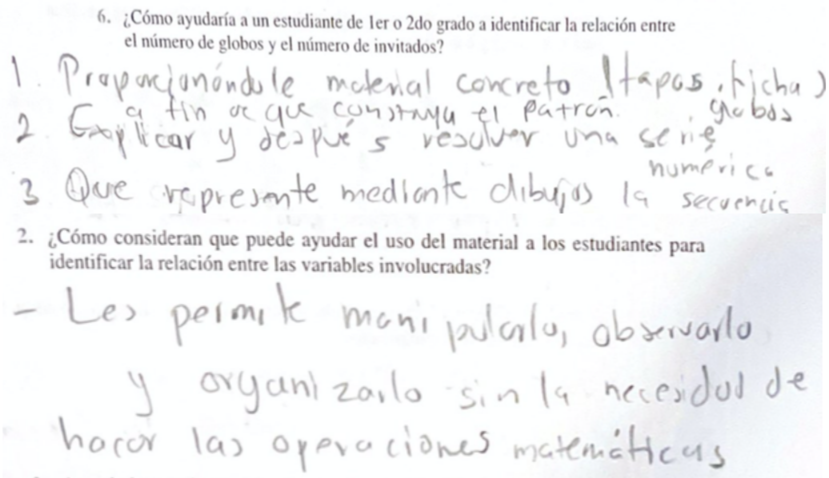
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b$ $(b =/0)$.

Justificación
Emplea la aproximación funcional de la forma $f(n) = an + b$ el que se relacionen las dos variables (dependiente e independiente), retomando la identificación de la propiedad común.

KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad y extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.

Justificación
Retoma la propiedad común entre las variables encontrada en el análisis de los casos particulares y extender ese razonamiento más allá de los casos que lo originaron.

Evidencias [2, C.2.6, b] [2, C.3.2, b]


6. ¿Cómo ayudaría a un estudiante de 1er o 2do grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados?

1. Proporcionándole material concreto (tapas, ficha) a fin de que construya el patrón. globos
2 Explicar y después resolver una serie numérica
3 Que represente mediante dibujos la secuencia

2. ¿Cómo consideran que puede ayudar el uso del material a los estudiantes para identificar la relación entre las variables involucradas?

- Les permite manipularlo, observarlo y organizarlo sin la necesidad de hacer las operaciones matemáticas

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
MKT
Recursos y materiales
Conocer la potencialidad del material concreto para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función.

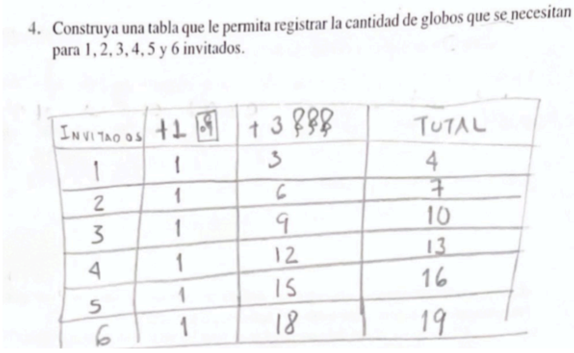
Justificación
Identifica la potencialidad de usar el material concreto para identificar la relación entre las variables de la función (2, 32-33, b).

MKT
Ejemplos y ayudas
Conocer que una forma de ayuda para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función es a través del uso de materiales concretos y representaciones gráficas.

Justificación

Identifica como un medio de ayuda para comprender la relación entre las variables de una función el uso de material concreto (2, 32-33, b).

Evidencia [2, C.3.4, b]



4. Construya una tabla que le permita registrar la cantidad de globos que se necesitan para 1, 2, 3, 4, 5 y 6 invitados.

Invitados	+1	+3	Total
1	1	3	4
2	1	6	7
3	1	9	10
4	1	12	13
5	1	15	16
6	1	18	19

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimientos
Conocer que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es a través del uso de tablas.

Justificación

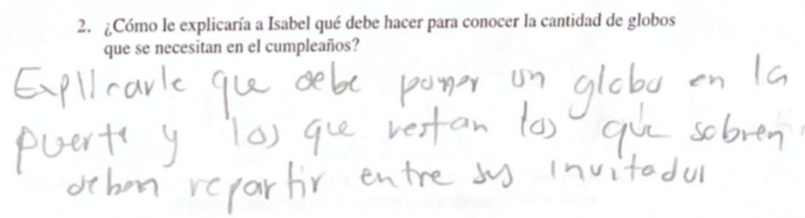
Identificar la relación entre las variables de una relación funcional a través del uso de tablas para registrar los datos al construir dos de ellas donde se hace evidente la relación entre las variables (dependiente e independiente) de la relación funcional.

Registros de representación
Saber expresar la relación entre las variables de una relación a través de un registro tabular.

Justificación

Emplea el registro tabular para expresar la relación entre las variables de la relación funcional (número de globos y número de invitados).

Evidencia [2, C.4.2, b]



2. ¿Cómo le explicaría a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños?

Explicarle que debe poner un globo en la puerta y los que restan los que sobren debon repartir entre sus invitados

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registro y representación
Saber expresar el proceso de generalización a través de un registro verbal.

Justificación

Expresa la generalización de una situación a través del registro verbal, al expresar el proceso que se tiene que realizar para lograr la generalización de la situación.

KPM
Prácticas ligadas a una témática específica
Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización.

Justificación
Identifica que extender el razonamiento a casos indeterminados permite generalizar una situación de relación funcional.

Evidencia [2, C.4.7, b]

7. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de globos dada una cantidad de invitados.

$3a+1=m$

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registro y representación
Saber expresar la extensión del razonamiento a casos indeterminados en una relación funcional a través del registro simbólico

Justificación
Extiende su razonamiento para casos concretos a casos indeterminados sustituyendo las operaciones que realizó para casos concretos por las variables "a" y "m" (2, 34-35, b).
Evidencia [2, C.5.3, b]

3. ¿Cómo explicaría a los estudiantes el proceso de generalización existente en la relación funcional en esta actividad?

- Mediante dibujos
- Material concreto
- Tabla de variación proporcional

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
MKT
Recursos y materiales
Conoce la potencialidad del uso de tablas y material concreto para favorecer el proceso de generalización.

Justificación
Identifica recursos y materiales, como las tablas y material concreto, para comprender las relaciones funcionales y potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico (2, 36-37, b).

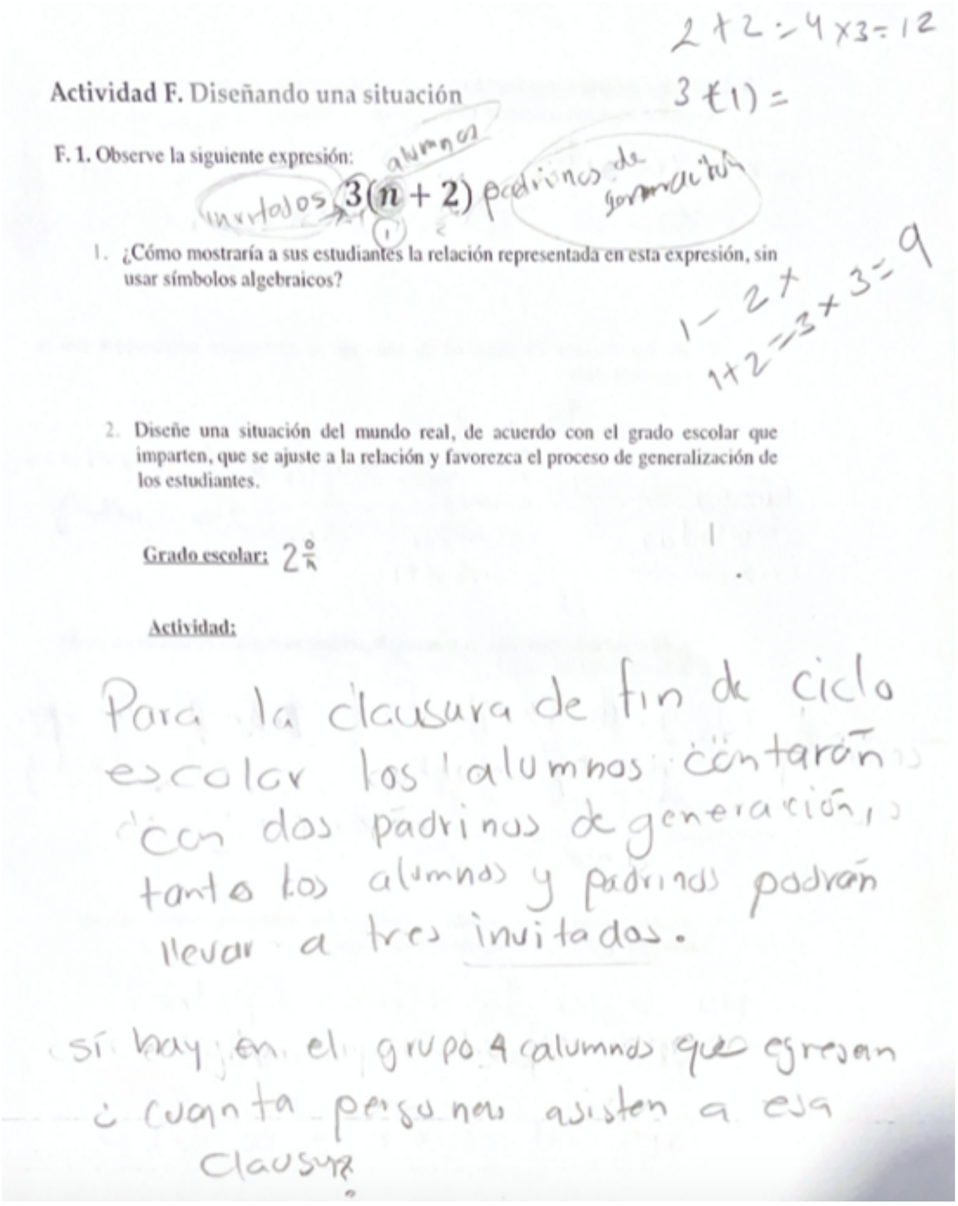
Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

Análisis de Actividad F de la Sesión 2 de profesor Fernando

Responder Actividad F. Diseñando una situación

Objetivo general: Construir una situación acorde al grado escolar que imparten en donde una expresión algebraica tenga sentido para los estudiantes y puedan desarrollar su proceso de generalización.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una expresión algebraica para que a patir de ella construyan una situación cercana a los estudiantes del grado que atienden.
Evidencias [2, F.1.1, b] [2, F.1.2, b]


$2+2=4 \times 3=12$

$3(1)=$

Actividad F. Diseñando una situación

F. 1. Observe la siguiente expresión:

alumnos

invitados $3(n+2)$ padrinos de generación

1. ¿Cómo mostraría a sus estudiantes la relación representada en esta expresión, sin usar símbolos algebraicos?

$1-2+$

$1+2=3+3=9$

2. Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.

Grado escolar: 2°

Actividad:

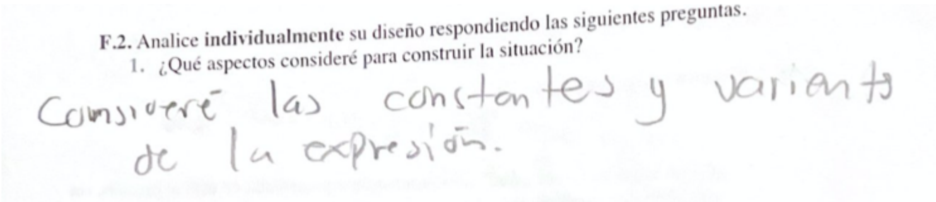
Para la clausura de fin de ciclo escolar los alumnos contarán con dos padrinos de generación, tanto los alumnos y padrinos podrán llevar a tres invitados.

si hay en el grupo 4 alumnos que egresan ¿cuanta personas asisten a esa clausura?

MK (Conocimiento matemático)
KoT
Fenomelogía
Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación dependiente de problemas aditivos y multiplicativos.

Justificación
Ubica una expresión algebraica en segundo de primaria a través del planteamiento de una situación en la que se necesita calcular una suma dada algunas condiciones. En la situación se cierra a calcular un solo caso de la expresión.

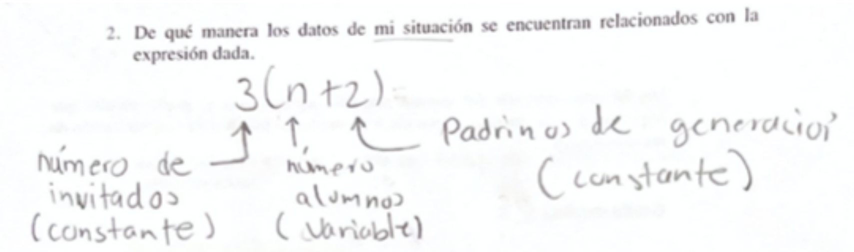
Evidencia [2, F.2.1, b]


F.2. Analice **individualmente** su diseño respondiendo las siguientes preguntas.
1. ¿Qué aspectos consideré para construir la situación?

Consideré las constantes y variantes de la expresión.

Conocimiento en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Propiedades y sus fundamentos
Saber que una expresión algebraica se encuentra compuesta de constantes y variables.

Justificación
Identifica las constantes y variables en juego dentro de una expresión algebraica.
Evidencia [2, F.2.2, b]


2. **De qué manera los datos de mi situación se encuentran relacionados con la expresión dada.**

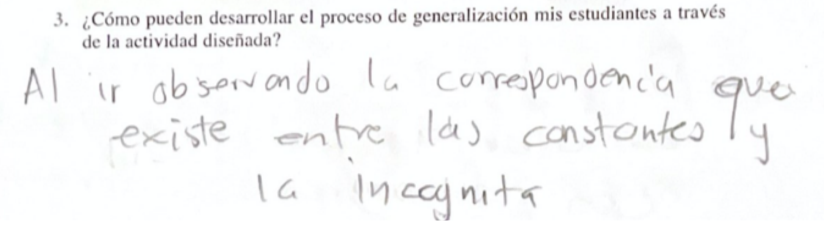
$3(n+2)$

número de invitados (constante)
número alumnos (variable)
Padrinos de generación (constante)

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT
Formas de enseñanza
Conocer que una forma de construir una actividad para la enseñanza en la que una expresión algebraica tenga sentido es identificar los datos invariantes y variantes en la expresión.

Justificación
Parte de identificar en la relación $3(n+2)$, que el 3 y el 2 se mantienen invariantes; por lo que en la situación estos se deben mantener. De esta manera plantea una situación donde el 3 es invariante y está dado por el número de invitados fijos, y el 2 por la cantidad de padrinos de generación.

Evidencia [2, F.2.3, b]


3. ¿Cómo pueden desarrollar el proceso de generalización mis estudiantes a través de la actividad diseñada?

Al ir observando la correspondencia que existe entre las constantes y la incognita

Conocimiento en acción
MK (Conocimiento matemático)

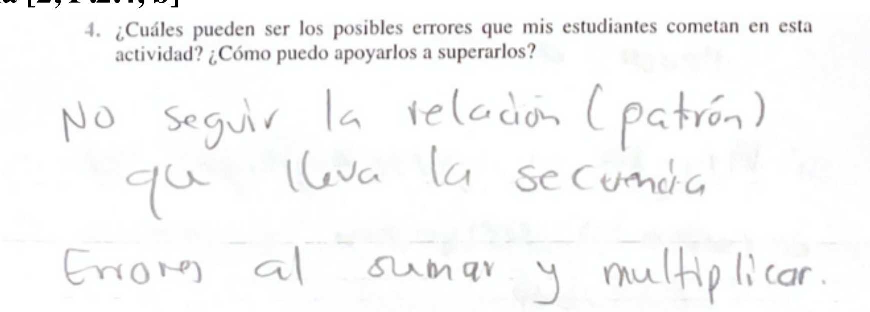
KoT
Definición
Saber qué es una constante (definición)
Saber qué es una incógnita (definición)

Justificación
Emplea de manera adecuada los conceptos de constante e incógnita (profundizado en entrevista).

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KFLM
Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático
Conocer que una forma en la que los estudiantes pueden desarrollar su proceso de generalización es observar la relación entre los datos variantes e invariantes.

Justificación
Identificar que los estudiantes pueden desarrollar su proceso de generalización en la situación planteada al encontrar una relación entre los datos variantes e invariantes.

Evidencia [2, F.2.4, b]


4. ¿Cuáles pueden ser los posibles errores que mis estudiantes cometan en esta actividad? ¿Cómo puedo apoyarlos a superarlos?

No seguir la relación (patrón) que lleva la secuencia

Errores al sumar y multiplicar.

Conocimiento en acción
PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KFLM
Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje
Conoce que un error que los estudiantes pueden comenter al generalizar es no tomar conciencia de la propiedad común.

Justificación
Identificar que un posible error de los estudiantes es no tomar en cuenta el patrón, es decir la propiedad común y por lo tanto no usar ésta para generalizar.

Evento de término: Se comenta de manera general la experiencia que tuvieron los profesores al diseñar una actividad partiendo de una expresión algebraica.

4.4.1.3. Identificación profundizada y ampliada de los conocimientos de la profesora Julieta.

SESIÓN 1

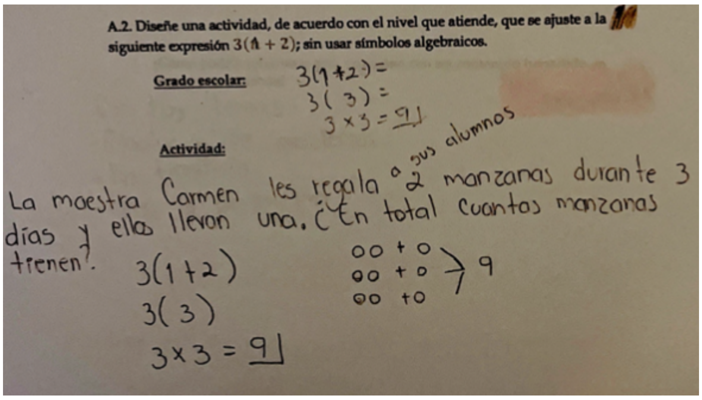
Análisis de Actividad A de la Sesión 1 de la profesora Julieta

Responder Actividad A. Para mí el pensamiento algebraico es…

Objetivo general: Recuperar el conocimiento previo que los profesores tienen sobre pensamiento algebraico y generalización. Recuperar el conocimiento que los profesores de ponen en acción al diseñar una actividad que permita conectar una relación algebraica con el contenido que desarrollan en el grado que atienden.

Evento desencadenante: Comenzar la aplicación del cuestionario interrogando a los participantes respecto a sus concepciones previas sobre pensamiento algebraico y generalización

Evidencia [1, A.2, c]


A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $3(n + 2)$; sin usar símbolos algebraicos.

Grado escolar: $3(1+2) =$ $3(3) =$ $3 \times 3 = 9$

Actividad:

La maestra Carmen les regala a sus alumnos 2 manzanas durante 3 días y ellos llevan una. ¿En total cuantas manzanas tienen?

$3(1+2)$
$3(3)$
$3 \times 3 = 9$

oo + o
oo + o → 9
oo + o

Conocimientos en acción

MK (Conocimiento matemático)

KoT

Propiedades y sus fundamentos

Conocer la propiedad distributiva.

Justificación

Realiza la operación que indica la expresión algebraica aplicando correctamente la propiedad distributiva.

KoT

Registros de representación

Saber ilustrar una expresión algebraica a través de un registro pictórico a través de dibujos (1, 6-7, c).

Justificación

Registra la expresión algebraica a través de dibujos para darle sentido cuando "n" tiene un valor específico.

KPM
Prácticas ligadas a una temática en específico
Conocer que una estrategia heurística para comprender una expresión algebraica es dar un valor a la variable y operar aritméticamente.

Justificación
Emplea una estrategia heurística que le permite comprender la expresión algebraica al darle un valor a la variable.

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

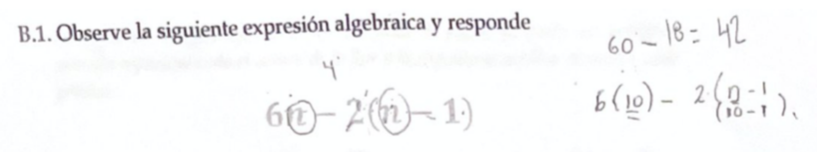
Análisis de Actividad B de la Sesión 1 de profesora Julieta

Responder Actividad B. ¿Tiene sentido?

Objetivo general: Analizar la posibilidad de darle sentido a una expresión algebraica a partir de contextos o situaciones cercanas a los estudiantes.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores la expresión algebraica $6n - 2\,(n-1)$ y cuestionarlos respecto a si está tiene o no sentido para los estudiantes del grado que atienden y de qué manera puede relacionarse con un contenido impartido en el grado que atienden.

Evidencia [1, B.1, c]



Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KPM
Prácticas ligadas a la matemática en general
Conocer que una estrategia heurística para comprender una expresión algebraica es dar un valor a la variable y operar aritméticamente.

Justificación
Da valor a la variable involucrada en la expresión algebraica para manipularla aritméticamente con el objetivo de comprender dicha expresión.

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

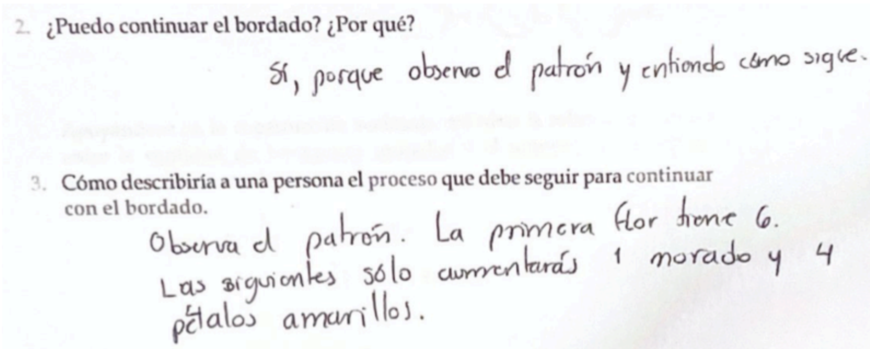
Análisis de Actividad C de la Sesión 1 de profesora Julieta

Responder Actividad C. Completemos el bordado

Objetivo general: Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la resolución y análisis de una secuencia con patrón geométrico para identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una secuencia con un patrón geométrico y analizar la posibilidad de continuar su construcción a fin de realizar un proceso de generalización.

Evidencia [1, C.2.2, c] [1, C.2.3, c]


2. ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?

Sí, porque observo el patrón y entiendo cómo sigue.

3. Cómo describiría a una persona el proceso que debe seguir para continuar con el bordado.

Observa el patrón. La primera flor tiene 6. Las siguientes sólo aumentarás 1 morado y 4 pétalos amarillos.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Definición
Conocer la definición de patrón.

Justificación
Emplea el concepto “patrón” para referirse a aquello que se repite (1, 8-9, c).

KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para continuar una secuencia es identificar el patrón de crecimiento o regularidad de la secuencia.

Justificación
Identifica visualmente que la secuencia sigue un patrón y por lo tanto puede continuar con el dibujo de la secuencia.

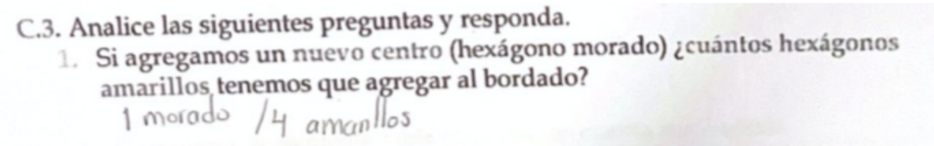
KPM
Prácticas ligadas a una temática en específico
Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización de patrones.

Justificación
Reconoce que identificar de una propiedad común o regularidad le permite continuar con una secuencia en el contexto de generalización de patrones (1, 10, c).

KoT
Registros de representación
Sabe expresar el proceso generalización a través de un registro verbal.

Justificación
Expresa de manera verbal el patrón identificado en la secuencia con patrón geométrico.

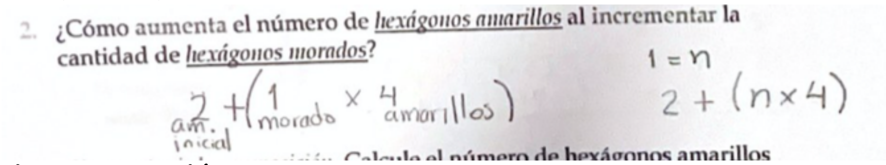
Evidencia [1, C.3.1, c]


C.3. Analice las siguientes preguntas y responda.
1. Si agregamos un nuevo centro (hexágono morado) ¿cuántos hexágonos amarillos tenemos que agregar al bordado?
1 morado /4 amarillos

Conocimiento en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registro de representación.
Saber expresar el patrón o regularidad de una secuencia a través de un registro simbólico.

Justificación
Expresa el patrón de crecimiento de la secuencia a través de un registro simbólico.

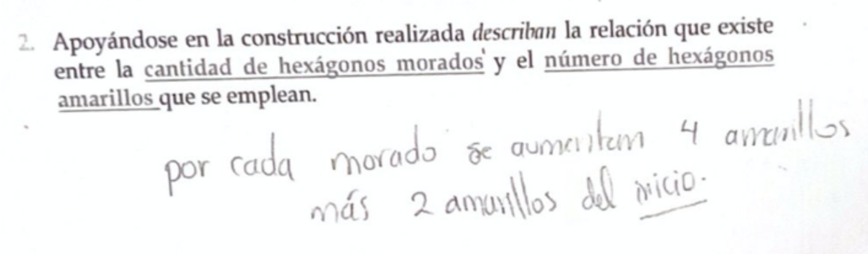
Evidencia [1, C. 3.2, c]


2. ¿Cómo aumenta el número de *hexágonos amarillos* al incrementar la cantidad de *hexágonos morados*?
$1 = n$
$2 + (1 \text{ morado} \times 4 \text{ amarillos})$
am. inicial
$2 + (n \times 4)$

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Registros de representación
Saber expresar la relación entre el número de elementos de un término de una secuencia y su posición a través de un registro simbólico.

Justificación
Retoma el patrón identificado en las preguntas anteriores a ésta, y pasar del registro verbal al registro simbólico, expresando en términos de "n" la relación encontrada.

Evidencia [1, C.4.2, c]


2. Apoyándose en la construcción realizada *describan* la relación que existe entre la cantidad de hexágonos morados y el número de hexágonos amarillos que se emplean.
por cada morado se aumentan 4 amarillos más 2 amarillos del inicio.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT

Registros de representación
Saber expresar el proceso generalización a través de un registro verbal.

Justificación
Expresa de manera verbal la regularidad encontrada en la secuencia.

Evidencia [1, C.4.3, c]

3. Completen la siguiente tabla tomando en cuenta sus análisis

Hexágonos morados	1	2	3	4	5
Hexágonos amarillos	4+2 6	8+2 10	12+2 14	16+2 18	20+2 22

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KPM
Prácticas ligadas a una temática en específico
Conocer que una estrategia heurística para generalizar una secuencia es descomponer aritméticamente los términos de la secuencia.

Justificación
Opera de manera aritmética los primeros 5 términos de la secuencia siguiendo la relación encontrada en la respuesta a la pregunta C.4.2.

Evidencia [1, C.4.4, a]

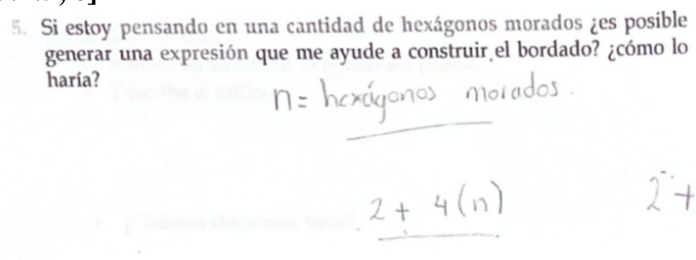
4. Siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿A qué se debe?

No porque quedarían incompletos.

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KPM
Prácticas ligadas a una temática en específico
Conocer que una estrategia heurística para hacer una inversión del proceso en la generalización de patrones es darle asignar valores a n para acercarse a $f(n)$.

Justificación
La profesora manifiesta que busca un número que multiplicado por 4 y aumentado en 2 le de 25, pero no hay ningún número que satisfaga esta relación, por lo que el bordado quedaría incompleto (1, 11-12, c).

Evidencia [1, C.4.5, c]


5. Si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados ¿es posible generar una expresión que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría?

n= hexágonos morados

2+ 4(n)

2+

KoT

Registros de representación

Saber expresar el proceso de generalización a través del registro simbólico.

Justificación

Expresa de manera simbólica la relación encontrada en las preguntas C.4.2 y C.4.3, a través de la expresión: $2 + 4(n)$ (1, 13-14, c).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

SESIÓN 2

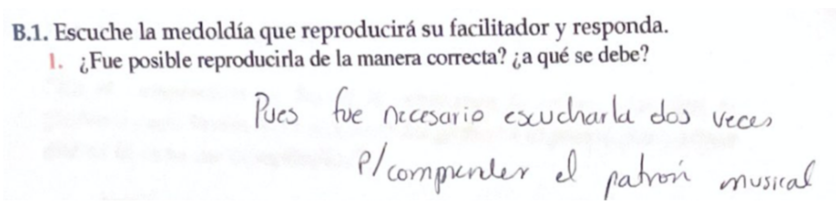
Análisis de Actividad B de la Sesión 2 de profesora Julieta

Responder Actividad B. ¿Qué escucho?

Objetivo general: Identificar el proceso de generalización que realizaron al reproducir las melodías; así como enlazar ese proceso que vivenciaron ellos con el que enfrentan sus estudiantes a fin de ayudar a su desarrollo.

Evento desencadenante: Reproducir tres melodías a los profesores a fin de continuar con ellas.

Evidencia [2, B.1.1, c]


B.1. Escuche la medoldía que reproducirá su facilitador y responda.

1. ¿Fue posible reproducirla de la manera correcta? ¿a qué se debe?

Pues fue necesario escucharla dos veces p/comprender el patrón musical

Conocimientos en acción

MK (Conocimiento matemático)

KoT

Procedimiento

Conocer que un procedimiento para continuar con una secuencia es identificar el patrón.

Justificación

Emplea el patrón musical para continuar con una melodía (profundizado en entrevista)

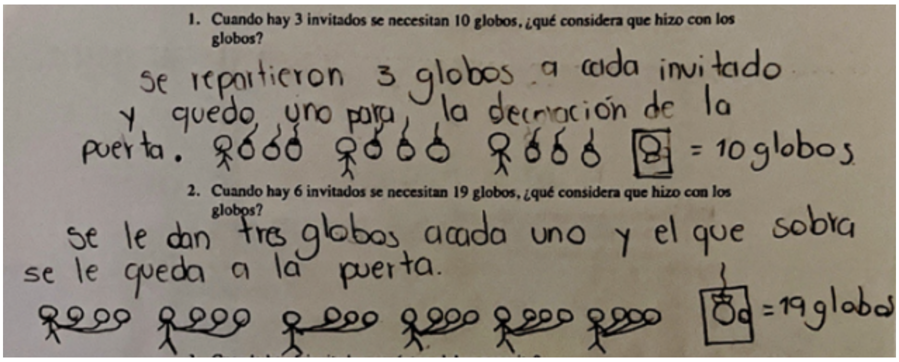
Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

Análisis de Actividad C de la Sesión 2 de profesora F.

Responder Actividad C. ¿Cuántos globos para cada invitado?
Objetivo general: Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la identificación de la relación funcional existente entre las variables involucradas a fin de identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una situación donde se necesita conocer la cantidad de globos que le tocan a cada invitado dada algunas condiciones.

Evidencia [2, C.1.1, c] [2, C.1.2, c]


1. Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué considera que hizo con los globos?

se repartieron 3 globos a cada invitado y quedo uno para la decración de la puerta. = 10 globos

2. Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué considera que hizo con los globos?

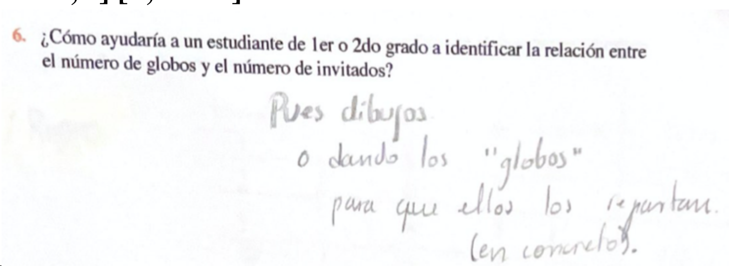
se le dan tres globos acada uno y el que sobra se le queda a la puerta.

= 19 globos

Conocimientos en acción
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un **procedimiento** para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es a través de la aproximación recursiva.

Justificación
Encuentra la relación entre las variables de la función a través de la aproximaxión recursiva, utilizando el método de conteo más o menos sofisticado, ya que reparte los elementos tomando en cuenta las condiciones de la situación.

Evidencia [2, C.2.6, c] [2, C.3.2]


6. ¿Cómo ayudaría a un estudiante de 1er o 2do grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados?

Pues dibujos o dando los "globos" para que ellos los repartan. (en concreto).

2. ¿Cómo consideran que puede ayudar el uso del material a los estudiantes para identificar la relación entre las variables involucradas?

Al hacer el reparto de manera concreta pueden comprenderlo mejor y manipular otras situaciones p/ sacar sus cálculos (con más o menos números)

PCK (Conocimiento matemático)
MKT
Ejemplos y ayudas
Conocer que una forma de ayuda para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función es a través de materiales concretos y representaciones gráficas.

Justificación
Identifica que una forma de apoyar a los estudiantes a comprender las relaciones funcionales es con material concreto "dándo los 'globos' para que ellos los repartan", de esta manera los estudiantes pueden identificar las relaciones entre las variables al tener conciencia del patrón de crecimiento (2, 18-19, c).

MKT
Recursos y materiales
Conocer la potencialidad del material concreto para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función.

Justificación
Identifica el uso de material concreto para que el estudiante pueda repartir, dadas las condiciones de la situación, y con ello comprender la relación funcional inmersa. Pero también es consciente de las limitaciones que tiene este material y que es importante que sea un apoyo pero que no sea el único medio de análisis (2, 18-20, c).

Evidencia [2, C.3.4, c]

4. Construya una tabla que le permita registrar la cantidad de globos que se necesitan para 1, 2, 3, 4, 5 y 6 invitados.

Invitados	Globos (3 x c/u)	+	Puerta	Total
1	3		1	4
2	6		1	7
3	9		1	10
4	12		1	13
5	15		1	16
6	18		1	19

Va en [illegible]

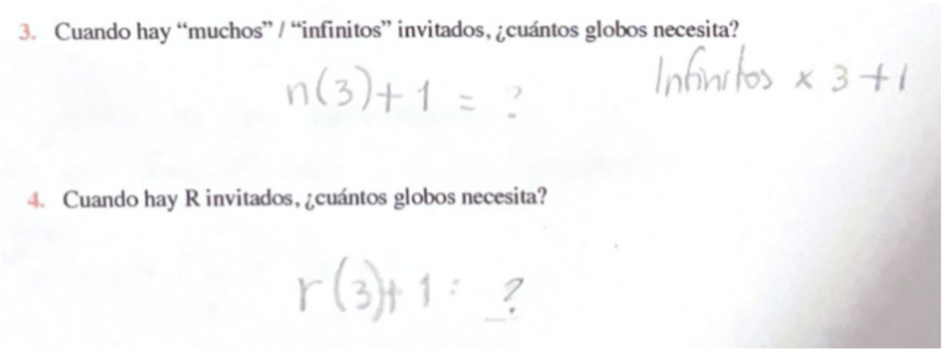
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimientos
Conocer que un procedimiento para identificar la relación entre las variables de una relación funcional es a través del uso de tablas para registrar los datos.

Justificación
Construye una tabla donde se hace evidente la relación entre el dominio y el contradominio de la relación funcional.

KoT
Registros de representación
Saber expresar la relación entre las variables de una relación a través de un registro tabular.

Justificación
Emplea el registro tabular para expresar la relación entre las variables de la relación funcional (número de globos y número de invitados).

Evidencias [2, C.4.3, c] [2, C.4.4, c]


3. Cuando hay "muchos" / "infinitos" invitados, ¿cuántos globos necesita?
n(3)+1 = ?
Infinitos x 3 +1
4. Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita?
r(3)+1 = ?

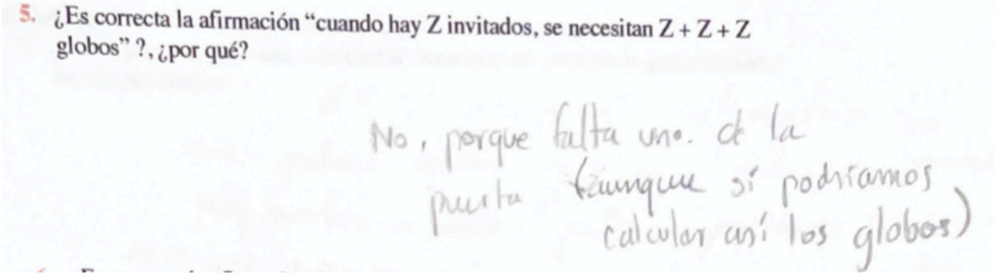
MK (Conocimiento matemático)
KoT
Procedimiento
Conocer que un procedimiento para expresar la relación entre las variables en casos indeterminados es extender el razonamiento generado en los casos determinados a los indeterminados.

Justificación
Extiende el razonamiento para casos concretos a casos indeterminados a través de una expresión algebraica.

KoT
Registro y representación
Saber expresar la extensión del razonamiento a casos indeterminados en una relación funcional a través del registro simbólico

Justificación
Extiende el razonamiento para casos concretos a casos indeterminados sustituyendo las operaciones que realizó para casos concretos por las variables "n" y "r".

Evidencia [2, C.4.5, c]



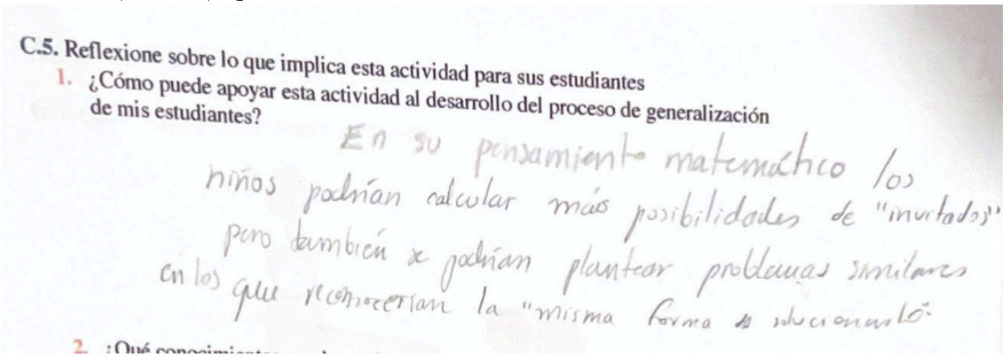
5. ¿Es correcta la afirmación “cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos” ?, ¿por qué?

No, porque falta uno de la puerta (aunque sí podríamos calcular así los globos)

MK (Conocimiento matemático)
KPM
Practicas ligadas a una temática en específico
Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para evaluar una expresión de generalización en una relación funcional.

Justificación
Emplea el razonamiento de casos indeterminados para evaluar si la expresión de generalización corresponde de forma adecuada (2, 21-24, c)..

Evidencia [2, C.5.1, c]



C.5. Reflexione sobre lo que implica esta actividad para sus estudiantes

1. ¿Cómo puede apoyar esta actividad al desarrollo del proceso de generalización de mis estudiantes?

En su pensamiento matemático los niños podrían calcular más posibilidades de "invitados" pero también se podrían plantear problemas similares en los que reconocerían la "misma forma de solucionarlo".

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT
Formas de enseñanza
Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización que los estudiantes planteen sus propias situaciones de relación funcional.

Justificación
Identifica la utilidad de que los estudiantes puedan plantear situaciones de relación funcional como la analizada en la actividad para favorecer su proceso de geneneralización (2, 25-28, c).

Evento de término: Compartir algunas respuestas de los profesores para dialogarlas en colectivo docente.

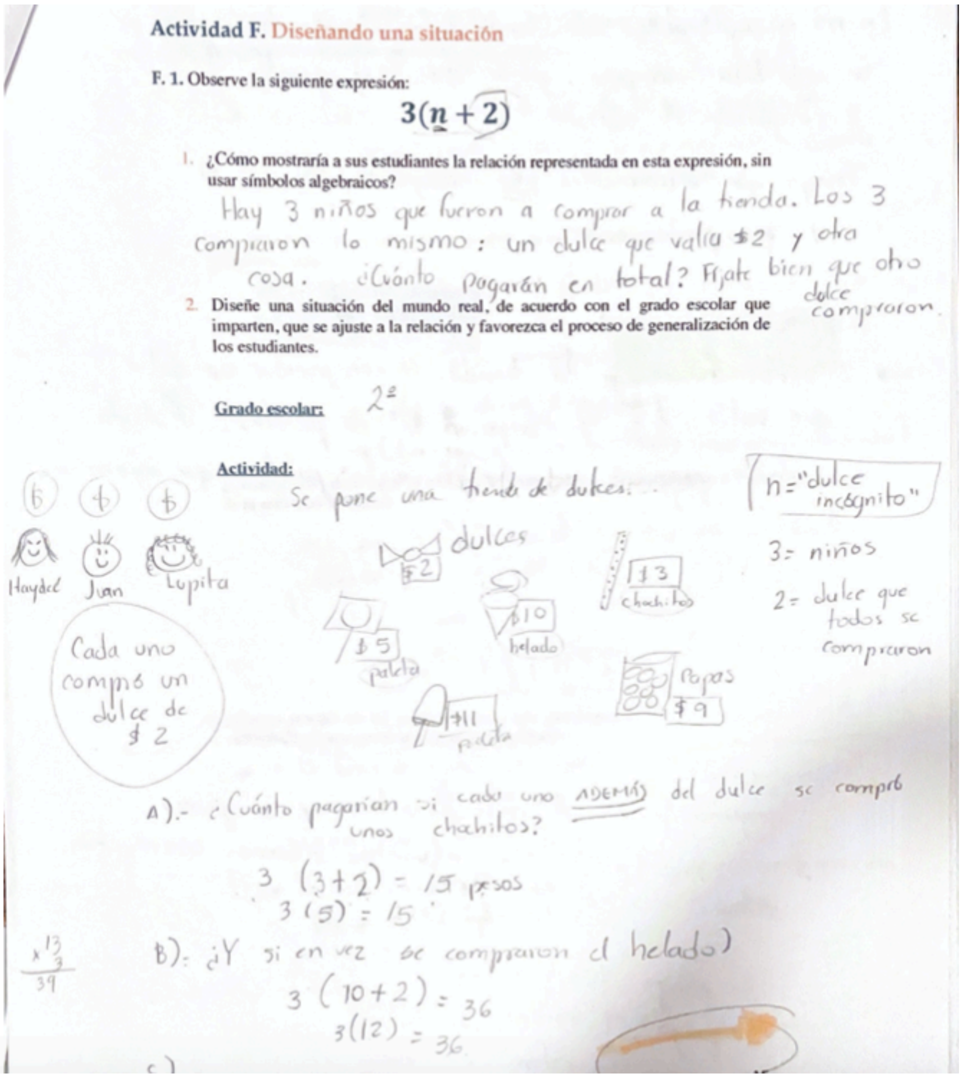
Análisis de Actividad F de la Sesión 2 de profesora Julieta

Responder Actividad F. Diseñando una situación

Objetivo general: Construir una situación acorde al grado escolar que imparten en donde una expresión algebraica tenga sentido para los estudiantes y puedan desarrollar su proceso de generalización.

Evento desencadenante: Presentar a los profesores una expresión algebraica para que a patir de ella construyan una situación cercana a los estudiantes del grado que atienden.

Evidencias [2, F.1.1, c] [2, F.1.2, c]


Actividad F. Diseñando una situación

F. 1. Observe la siguiente expresión:

$$3(n+2)$$

1. ¿Cómo mostraría a sus estudiantes la relación representada en esta expresión, sin usar símbolos algebraicos?

Hay 3 niños que fueron a comprar a la tienda. Los 3 compraron lo mismo: un dulce que valía \$2 y otra cosa. ¿Cuánto pagarán en total? Fíjate bien que otro dulce compraron.

2. Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.

Grado escolar: 2°

Actividad: Se pone una tienda de dulces...

n = "dulce incógnito"

3 = niños

2 = dulce que todos se compraron

A).- ¿Cuánto pagarían si cada uno ADEMÁS del dulce se compró unos chahitos?

3 (3+2) = 15 pesos

3 (5) = 15

B). ¿Y si en vez se compraron el helado?

3 (10+2) = 36

3(12) = 36

C)

Conocimientos en acción

MK (Conocimiento matemático)

KoT

Fenomelogía

Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación dependiente de problemas aditivos y multiplicativos.

Justificación
Platea una situación en la que se necesite calcular una suma pero se desconoce el valor de uno de los sumandos. En esta situación el valor desconocido puede tomar cualquier valor dando el carácter de variable como número general. De esta manera ubica el concepto de variable como número general dentro de un problema aditivo.

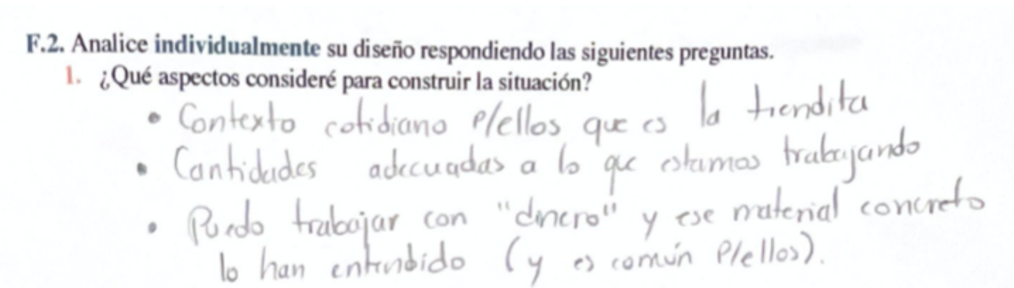
KSM
Conexiones de simplificación
Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de secuencias con patrones geométricos y problemas aditivos con una variables.

Justificación
Conecta una expresión algebraica con un tema de primer grado, al construir a partir de una expresión algebraica una situación de operaciones aritméticas básicas donde el valor que se desconoce puede tomar cualquier valor.

PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT
Formas de enseñanza
Conocer que una forma de construir una actividad para la enseñanza en la que una expresión algebraica tenga sentido es identificar los datos invariantes y variantes en la expresión.

Justificación
Parte de identificar en la relación $3(n+2)$, que el 3 y el 2 se mantienen invariantes; por lo que en la situación estos se deben mantener. De esta manera plantea una situación donde el 3 es invariante y está dado por el número de invitados fijos, y el 2 por la cantidad de padrinos de generación.

Evidencia [2, F.2.1, c]


F.2. Analice **individualmente** su diseño respondiendo las siguientes preguntas.
1. ¿Qué aspectos consideré para construir la situación?
- Contexto cotidiano p/ellos que es la tiendita
- Cantidades adecuadas a lo que estamos trabajando
- Puedo trabajar con "dinero" y ese material concreto lo han entendido (y es común p/ellos).

Conocimientos en acción
PCK (Conocimiento Didáctico del Contenido)
KMT

Recursos y materiales
Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza el uso de materiales concretos que puedan dar sentido a las situaciones que involucran una expresión algebraica.

Justificación
Identifica los recursos y/o materiales que apoyan para que los estudiantes comprendan la situación y puedan generalizarla (2, 29-30, c).

Evento de término: Se comenta de manera general la experiencia que tuvieron los profesores al diseñar una actividad partiendo de una expresión algebraica.

4.5. Cuarto acercamiento al análisis de datos

4.5.1. Indicadores de conocimiento MTSK-proceso de generalización.

En el cuarto acercamiento se construye la lista de indicadores de conocimiento MTSK-el proceso generalización en *Early Algebra*. La lista de indicadores de conocimientos final se presenta a mayor detalle en el capítulo de resultado, pero a fin de dar un panorama sobre el proceso de construcción de esta, se muestra al lector los aspectos que se tomaron en cuenta para la construcción.

Para la construcción de los indicadores, primeramente, se señaló el subdominio y categoría a la que pertenece, posteriormente se escribe el indicador a priori, y posteriormente el indicador a posteriori, para ello se específica el episodio [Sesión, Actividad, informante] y el estatus del indicador [E= Evidenciado] [Rd=Rediseñado] [Ne=No Evidenciado] [N=Nuevo], tal como se muestra en la figura 18.

Figura 19

Estructura de construcción de indicadores MTSK-Proceso de generalización.

Subdominio. *Categoría*
Indicador a priori
[Episodio] [Estatus] *Indicador a posteriori*

El siguiente es un ejemplo de un indicador del dominio MK y el subdominio KoT dentro de la categoría de fenomenología.

KoT. ***Fenomenología***
KoT 1. Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación.
[1, A.2, a] [1, A.2, b] [Rd]Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación dependiente de problemas aditivos y multiplicativos.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

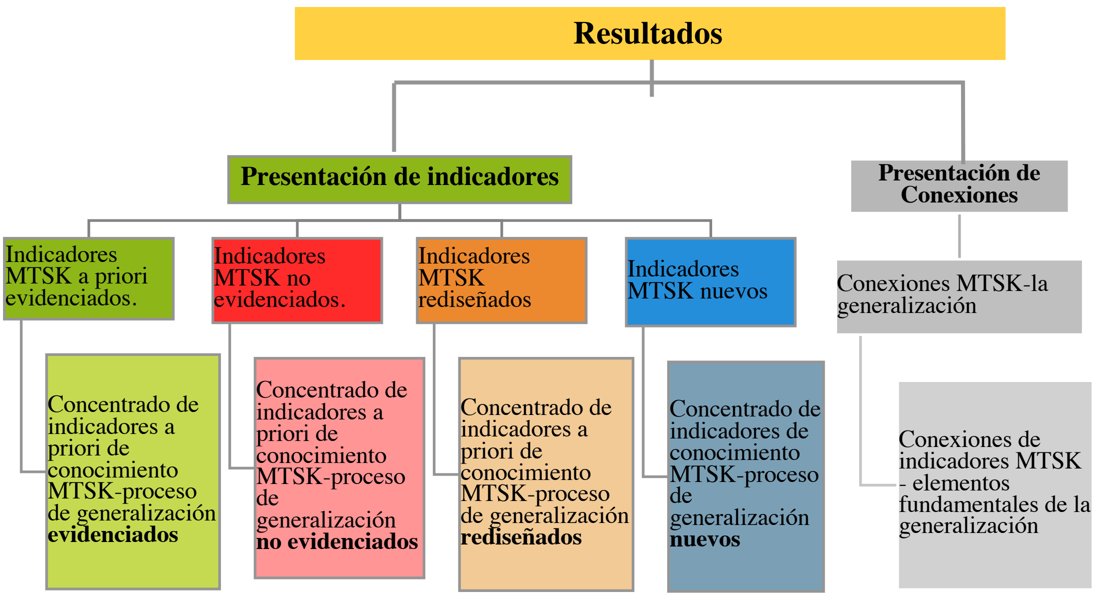
En este apartado se presentan los resultados en cuánto a los conocimientos MTSK-proceso de generalización que los profesores de primero y segundo de primaria pusieron en acción al resolver las actividades de *Early Algebra*.

Después de realizar el análisis correspondiente se obtuvo como resultado indicadores a priori evidenciados, no evidenciados, rediseñados y nuevos. Por ello, la presentación de este apartado se organiza de acuerdo con estos resultados, para posteriormente exponer las conexiones entre ellos y su relevancia.

A pesar de que el estudio no es de carácter cuantitativo, a fin de tener elementos de interpretación se presenta una comparación en términos de la cantidad de indicadores evidenciados, no evidenciados, rediseñados y nuevos, en contraste con la cantidad de indicadores *a priori*. A fin de tener un referente visual de dichos resultados, la presentación de los indicadores se acompaña de una gráfica donde se puede observar su estatus (evidenciados, no evidenciados, rediseñados y nuevos) por dominio; la sección en colores marca la presencia de los indicadores y la sección gris el total de indicadores *a priori*. Esta comparación brinda elementos para interpretar las causas de estos resultados.

Figura 20

Estructura de los resultados de la investigación.



Fuente: elaboración propia

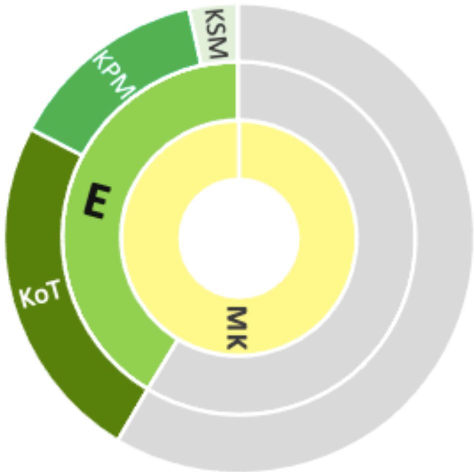
5.1. Presentación de indicadores de conocimiento MTSK-proceso de generalización

5.1.1. Indicadores a priori evidenciados

Como resultados se encontró que en el dominio MK los profesores evidenciaron 12 de los 29 indicadores a priori diseñados. En el subdominio KoT se establecieron 20 indicadores a priori de los cuales se evidenciaron 7; del KSM se establecieron 4 y se evidenció uno; mientras que del KPM se establecieron 6 y se evidenciaron 4, como puede visualizarse en la siguiente figura 20.

Figura 21

Gráfica de indicadores a priori evidenciados MK.



Fuente: elaboración propia

Como puede notarse existió un mayor número de indicadores *a priori* evidenciados en el subdominio KoT. Lo cual se relaciona con el tipo de evidencia recuperada de los profesores donde mayormente hay una incidencia de este subdominio, al ponerse en acción conocimientos sobre *definiciones, registros de representación, procedimientos, propiedades y sus fundamentos,* para generalizar las secuencias y las relaciones funcionales. Dentro de este subdominio es importante resaltar, que los indicadores evidenciados dan muestra de un conocimiento algebraico común o *per se* (Aké, 2021), que les permitió dar respuesta a las actividades en un nivel básico, por lo que puede inferirse que se encontraron en la forma en que se tenían pensados dado que no requirió la demanda de un carácter algebraico mayor.

Por su parte, en el dominio KSM solo fue posible identificar el indicador KSM 2, lo cual puede tener su raíz en la relación que los profesores tienen (en el nivel que atienden) con el trabajo con secuencias (geométricas y de colores) lo que les permitió conectar este contenido con el proceso de generalización.

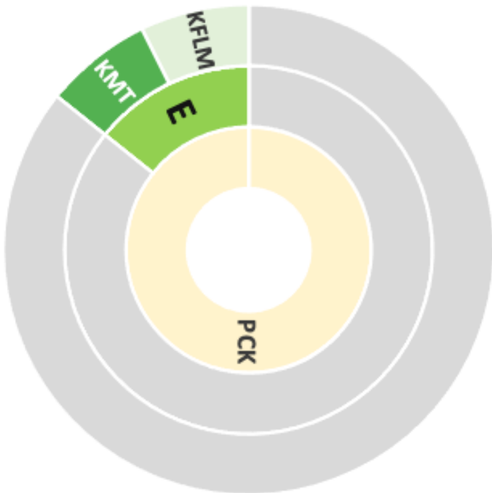
En lo que respecta al KPM, se puede interpretar que los indicadores *a priori* evidenciados pudieron darse por la relación con la capacidad natural para generalizar

(Mason, 1999) al desarrollar de forma espontánea los momentos del proceso de generalización e identificar el papel que jugaron para responder de manera adecuada cada una de las preguntas.

Por su parte en el dominio PCK los profesores evidenciaron 2 de los 14 indicadores a priori diseñados. Existiendo una disminución de evidencia con respecto a los indicadores del MK. Referente a los subdominios, en el KFLM se establecieron 5 indicadores a priori de los cuales se evidenció uno; mientras que en el KMT se establecieron 6 de los cuales se evidenció uno; y en lo que respecta al KMLS se establecieron 3 indicadores, pero ninguno fue evidenciado, como puede visualizarse en la siguiente figura 21.

Figura 22

Gráfica de indicadores a priori evidenciados PCK.



Fuente: elaboración propia

El indicador *a priori* evidenciado en el subdominio KFLM, puede derivarse de la experiencia que los profesores tienen en los primeros grados de primaria que le permiten conocer los temas matemáticos previos que los estudiantes deben abordar antes de iniciar primer o segundo grado de primaria. Así, también los indicadores *a priori* evidenciados en el subdominio KMT pueden guardar una relación con el expertis de los profesores en estos grados, lo cual les brinda un conocimiento amplio sobre el tipo de actividades que favorecen el aprendizaje de las matemáticas, y de manera particular el proceso de generalización.

De estos indicadores no fue necesario realizar algún rediseño, ya que los profesores usaron el conocimiento *a priori* tal cual estaba establecido tanto para resolver las actividades como dentro de su discurso y argumentos.

Como se hacía notar en el subdominio KoT los indicadores *a priori* identificados dan muestra de un conocimiento algebraico común, que no demandó una profundización algebraica mayor. Esta es una constante que permeó en los demás subdominios y lo cual puede ser derivado del hecho que, dado que para su construcción se tomaron en cuenta los hallazgos de algunas investigaciones realizadas sobre el conocimiento del profesor y de los estudiantes de primero y segundo de primaria, fue posible identificarlos de la forma en la cual fueron redactados. Lo que no resultó de esta manera, para los indicadores que demandaban un grado más avanzado de conocimiento algebraico y sobre los que fue necesario realizar algunos ajustes, como se mostrará en el siguiente apartado.

En total se evidenciaron 16 indicadores *a priori*, que se muestran en el siguiente concretado organizados en los dominios y subdominios del MTSK.

Tabla 12

Concentrado de indicadores a priori evidenciados.

Dominio	Subdomin	Categoría	Indicadores a priori evidenciados
MK	KoT	*Propiedades y sus fundamentos*	**KoT 4.** Conocer la propiedad distributiva.
			KoT 5. Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad
			KoT 6. Conocer que una expresión algebraica se encuentra compuesta por variables y constantes.
		Defini ciones	**KoT 13.** Saber lo que es una secuencia (definición)
			KoT 14. Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización.
		Procedimientos	**KoT 16.** Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva.
			KoT 17. Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n)\ =\ an+b\ (b =/0)$.
	KSM	*Conexiones de simplificación*	**KSM 2.** Conocer que la generalización se conecta con el conteo y la agrupación mediante el reconocimiento de patrones.
	KPM	*Prácticas ligadas a una temática en específico*	**KPM 2.** Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.
			KPM 3. Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones.
			KPM 4. Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización.

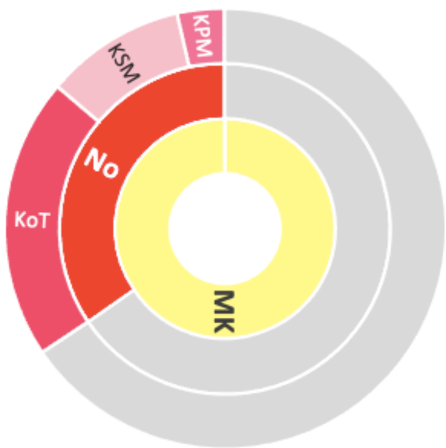
		Prácticas ligadas a la matemática en general	**KPM 6.** Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.
PCK	KFLM	*Teorás de aprendizaje de las matemáticas*	**KFLM 2.** Conocer los contenidos matemáticos previos que puede retomar para diseñar su situación y fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico.
	KMT	*Formas de enseñanza*	**KMT 4.** Conocer la potencialidad que tiene en la enseñanza del proceso de generalización el uso de situaciones de variación.

5.1.2. Indicadores a priori no evidenciados

Un resultado más de este trabajo fue la identificación de indicadores a priori que fueron no evidenciados. En el dominio MK no se evidenciaron 10 indicadores. De los cuales 6 pertenecen al subdominio KoT, 3 al KSM y 1 al KPM, como podemos ver en la siguiente gráfica.

Figura 23

Gráfica de indicadores a priori no evidenciados MK.



Fuente: elaboración propia

Dentro del KoT en la categoría de *fenomenología*, los indicadores a priori que no se evidenciaron son los que corresponden a conocer el uso de la generalización tanto para resolver secuencias de patrones como relaciones funcionales. A pesar de que los profesores usaron este proceso para resolver las actividades, cuando tuvieron que plantear actividades donde se diera sentido a una expresión algebraica no situaron está fenomenológicamente en estos contextos, incluso las situaciones no se explotaron hasta llevar a cabo este proceso. Lo anterior puede deberse a la escasa familiarización que tienen los profesores, en este nivel, con dicho proceso.

Por su parte en la categoría de *propiedades y sus fundamentos*, el indicador a priori KoT 7 no se evidenció, puesto que los profesores identificaron el patrón con una sola variable de agrupamiento, lo que provocó que no se derivaran más expresiones de generalización algebraicamente equivalentes. Lo que los llevó a generar una solo de estas expresiones y asociar que solo es posible generar una expresión de generalización para una situación. Lo anterior se puede deberse a que, aunque tienen experiencia resolviendo secuencias, estas se quedan hasta completar términos cercanos o lejanos, pero no indeterminados lo que es necesario para generar una expresión algebraica.

Sobre las *definiciones*, lo profesores mostraron dificultades para definir lo qué es relación funcional. En este sentido se observó que los profesores tienen poca relación con este tema ya que desde su definición fue complejo para ellos conceptualizarla e incluso ejemplificarla. Lo cual puede ser derivado de ser un tema que, explícitamente, no es tratado en estos grados y por lo tanto su relación es alejada.

Sobre los *procedimientos*, los profesores no dieron cuenta del indicador *a priori* KoT 20 que está relacionado con la inversión del proceso. Los profesores hicieron uso de conocimientos básicos para resolver las actividades cuando lo que se buscaba era una relación directa, sin embargo, cuando esta era inversa se presentaban dificultades, y a pesar de que dieron respuestas a preguntas de este tipo lo hicieron siguiendo procedimiento de la relación directa y no realizando una inversión del proceso. Esto puede derivarse de que las actividades, sobre todo de secuencia, regularmente se buscan la cantidad de elementos que tiene un término dado su lugar y no viceversa, así la falta de familiaridad con estos casos impide un desarrollo de conocimiento de este tipo.

Por su parte, en el dominio KSM los indicadores KSM 3 de la categoría *conexiones de simplificación* y KSM4 de la categoría *conexiones de complejuzación* no se evidenciaron; lo cual puede ser derivado de la manera de identificar este tipo de conocimiento con el instrumento de este estudio. Esto dado que para identificarlo se destinó el diseño de una actividad en la que conectaran temas algebraicos (expresión algebraica) con un tema del nivel que atienden, así se establecieron preguntas directas sobre dichas conexiones, por lo que existió poca evidencia para identificar la movilización de este.

También en el caso del indicador KSM 3, se encuentra relacionado con el conocimiento que se tiene sobre las relaciones funcionales y los temas con los que se puede conectar en primero y segundo grado. Sin embargo, desde el conocimiento de *definiciones* se muestran dificultades con este tema que llevan a no ser capaces de establecer conexiones. Lo cual, al igual que en la categoría de *definiciones*, puede estar relacionado con la falta de tratamiento de este tema en el grado que imparte.

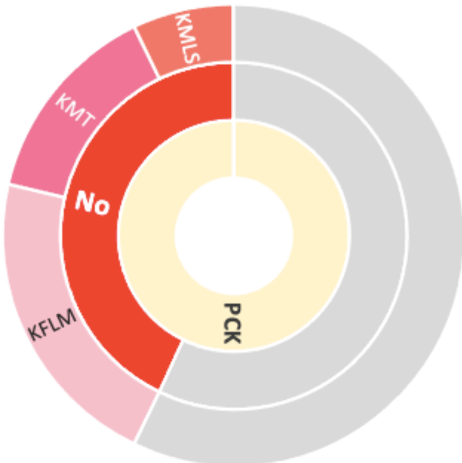
En lo que respecta al KPM fue posible identificar el KPM 1 que tiene que ver con el conocimiento del rol de la generalización el *Early Algebra*, sin embargo, al ser un campo poco o nada explorado por los profesores de nivel primaria, a pesar de tener un conocimiento sobre la generalización difícilmente conectan este con lo que se pretende alcanzar con esta propuesta curricular.

Así, los indicadores no evidenciados del dominio MK responden a un nivel de conocimiento algebraico más avanzado, sobre todo en lo que refiere a las relaciones funcionales y por tanto no fue posible encontrarlos en los profesores de primero y segundo de primaria. Por otro lado, la ausencia de estos indicadores refuerza los hallazgos de las investigaciones que reportan las dificultades que enfrentan los profesores al lograr rescatar elementos matemáticos para articular reglas generales o poner de manifiesto aspectos de generalización de propiedades y relaciones funcionales (Hohensee, 2017; Stephens, 2008, Kieran, 2006).

En lo que respecta al dominio PCK no se evidenciaron 6 indicadores, 3 de los cuales pertenecen al subdominio KFLM, dos al KMT y uno al KMLS, como puede apreciarse en la siguiente figura.

Figura 24

Gráfica de indicadores a priori no evidenciados PCK.



Fuente: elaboración propia.

En lo referente a los subdominios KFLM y KMT la no identificación de los indicadores puede encontrarse mayormente asociada al diseño del instrumento, el cual a pesar de contener preguntas que buscaron rescatar este conocimiento, por medio del diseño y justificación de una situación, las respuestas de los profesores no dieron elementos para poder considerar la evidencia de éstos.

Se considera que esto se encuentran relacionado también con el hecho de que este tipo de conocimientos pueden ser mayormente identificado con la observación de las clases. Así que, de acuerdo con la naturaleza del instrumento, fue un poco más complejo identificarlo únicamente con el diseño de una actividad.

En lo que corresponde al KMLS, el indicador que no se evidenció corresponde a la categoría de *nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental*. En este, los profesores no evidenciaron conocimiento ni siquiera en lo que corresponde al programa de estudios 2017, que es sobre el que tienen un conocimiento profundo de los temas. Esto se puede derivar de que su conocimiento gire únicamente sobre los contenidos específicos que se abordan en los grados que imparten y no en el desarrollo conceptual o procedimental.

En total no se evidenciaron 14 indicadores *a priori*, los cuales se concentran en la siguiente tabla, organizados en los dominios y subdominios del MTSK.

Tabla 13

Concentrado de indicadores a priori no evidenciados.

Dominio	Subdomin	Categoría	Indicadores a priori NO evidenciados
MK	KoT	*Fenome nología*	**KoT 2.** Conoce el uso de la generalización para construir secuencias con patrones geométricos y/o numéricos.
			KoT 3. Conoce el uso de la generalización para resolver relaciones funcionales.
		Propiedades y sus fundamentos	**KoT 7.** Conocer que una propiedad de la generalización de patrones geométricos es que el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes.
		Definiciones	**KoT 15.** Conocer que una relación funcional se define como la correspondencia entre dos o más cantidades que covarían.
		Procedi mientos	**KoT 18.** Conocer que un procedimiento para identificar un patrón geométrico en una secuencia es a través de la variable de agrupamiento. **KoT 20.** Conocer que un procedimiento para hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos es a través de la inversión del proceso de generalización.
	KSM	*Conexiones de simplificación*	**KSM 2.** Conocer que la generalización se conecta con el conteo y la agrupación mediante el reconocimiento de patrones. **KSM 3.** Conoce que una relación funcional se conecta con un tema de primero o segundo de primaria a través de problemas aditivos y multiplicativos.
		Conexiones de complejización	**KSM 4.** Conocer que las secuencias con patrones geométricos se contectan con el tema de expresiones algebraica a través de las expresiones de generalización.

	KPM	*Prácticas ligadas a una temática en*	**KPM 1.** Conocer el rol de la generalización en *Early Algebra*.
PCK	**KFLM**	*Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*	**KFLM 3.** Conocer que un error que los estudiantes pueden cometer al generalizar es expresar incorrectamente el patrón identificado
		Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático	**KFLM 4.** Conoce que una manera en la que los estudiantes hacen evidente la identificación de un patrón es a través de expresiones como "lo que se repite”.
			KFLM 5. Conoce que una manera en la que los estudiantes resuelven situaciones de generalización de patrones lineales es a través de la estrategia aditiva.
	KMT	*Formas de enseñanza*	**KMT 1.** Conoce la potencialidad que tienen para la enseñanza de la generalización de patrones el uso de la variable de agrupamiento. **KMT 3.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de actividades que favorezcan la generalización como lo son las secuencias con patrones geométricos.
		Ejemplos y ayudas	**KMT 5.** Conoce que una forma de ayuda para que los estudiantes encuentren la expresión de generalización es identificar los datos variantes e invariantes en la relación.
	KMLS	*Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimiental*	**KMLS 2.** Conocer que en la fase 3 de la Nueva Escuela Mexicana, se debe ofrecer un primer acercamiento a la modelación, la secuenciación y poder resolver situaciones análogas y nuevas.

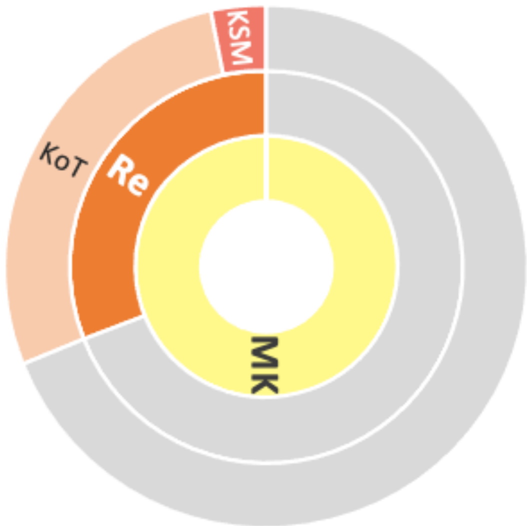
5.1.3. Indicadores a priori rediseñados

Otro de los resultados obtenidos, es la existencia de indicadores rediseñados, ya que las respuestas y argumentos que brindaron los profesores hicieron necesarios hacer cambios en la redacción a fin de que se ilustre de forma más clara los conocimientos que pusieron en acción los profesores.

En el dominio MK se rediseñaron 8 indicadores a priori, y en algunos casos de un indicador a priori se desprendieron dos o más indicadores (como se muestra en la tabla 2), teniendo un total de 15 indicadores a posteriori. Del subdominio KoT se rediseñaron 8 indicadores a priori de los que se generaron 13 indicadores a posteriori; del KSM fue rediseñado un indicador del que se desprendieron 2; y del KPM no hubo indicadores rediseñados. Tal como podemos observar en la figura 24.

Figura 25

Gráfica de indicadores a priori rediseñados MK.



Fuente: elaboración propia.

Los indicadores del dominio MK fueron rediseñados atendiendo el nivel de conocimiento algebraico de los profesores. Los indicadores *a priori* diseñados se construyeron pensando en una evolución del conocimiento yendo de conocimientos más o menos sofisticados a aquellos de un carácter mayormente algebraico. Sin embargo, esta evolución no se alcanzó, por lo que los indicadores que dan cuenta de un conocimiento algebraico profundo tuvieron que ser adecuados al nivel que los profesores manifestaron.

En el subdominio KoT hubo ajustes en los indicadores *a priori* de todas sus categorías, excepto en *propiedades y sus fundamentos*. En lo que corresponde *fenomenología*, el indicador KoT 1 se ajustó en términos de precisar el contexto de variación en el que fenomenológica se puede ubicar una de expresiones algebraica. Lo cual se debe al conocimiento que los profesores tienen sobre los temas que se abordan en el grado que imparten y le permite elegir un contexto adecuado para llevar a cabo dicha ubicación.

En la categoría de *registros de representación,* por su parte, la adecuación de los indicadores *a priori* KoT 8, KoT 9 y KoT 10, se realizaron derivado de encontrar que el conocimiento de los registros de representación se encontraba ligado al "saber expresar" más que al conocimiento del registro como tal.

De manera particular del indicador *a priori* KoT 10, se desprendieron 5 indicadores, ya que fue necesario precisar los diferentes momentos del proceso de generalización donde usaron la expresión simbólica, como lo es al comunicar la relación entre las variables, el patrón o regularidad, la extensión del razonamiento a lo indeterminado. Se considera este reajuste del indicador *a priori* KoT 10 se debe a lo eficiente que puede ser para los profesores usar este tipo de registro para comunicar cada uno de los momentos del proceso de generalización, sintetizando de esta manera lo que pueden expresar de forma verbal, pero a través de una expresión simbólica más concreta. Sin embargo, es importante señalar que, aunque dan cuenta de saber expresar a través del registro simbólico de una forma más frecuente, los profesores primero pasaron por una expresión verbal que les dio los elementos para poder desglosar el proceso de manera simbólica.

En lo que respecta a la categoría de *definiciones*, el rediseño de los indicadores a priori KoT 11 y 12, se dieron derivado de que los profesores no mostraron un conocimiento sobre definiciones formales de conceptos como pensamiento algebraico y generalización, sin embargo, rescataron elementos importantes de la definición por lo que los indicadores se ajustaron al nivel de conocimiento sobre las *definiciones* que los profesores tienen.

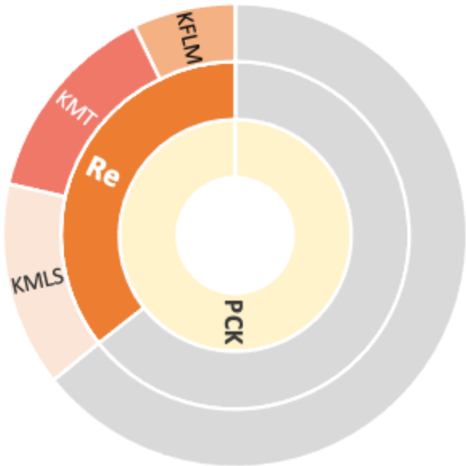
Finalmente, en la categoría de *procedimientos* perteneciente al KoT, el indicador *a priori* KoT 19 dio origen a tres indicadores más sencillos que descompusieron al mismo en partes. Se encontró que más que encontrar un conocimiento de procedimiento sobre el proceso de generalización de una forma global, lo profesores dieron cuenta de este conocimiento por momentos. Esto reafirma el hecho de que el proceso de generalización se compone de momentos, por lo tanto, aunque se lleve a cabo todos estos los conocimientos que se derivan en el trayecto responden a motivos diferentes, solo pueden ser primeramente identificar el patrón para posteriormente extenderlo a otros casos y más adelante a casos indeterminados.

Por su parte en el KSM, el indicador rediseñado responde al hecho de precisar el conocimiento con el que se conecta una expresión algebraica en primer grado y en segundo grado; por lo que se desprenden dos indicadores. Esta precisión, puede estar ligada a la experiencia que los profesores tienen impartiendo estos grados, lo que les permite realizar estas precisiones.

Pasando al dominio PCK, los resultados informan que hubo un rediseño total de 5 indicadores *a priori*. Del subdominio KFLM se rediseñó un indicador; del KMT se rediseñaron 2 indicadores; y del KLMS se rediseñaron 2 indicadores. Como podemos visualizar en la figura 25.

Figura 26

Gráfica de indicadores a priori rediseñados PCK.



Fuente: elaboración propia.

El indicador rediseñado en el subdominio KFLM, se deriva de encontrar que los profesores no solo reconocen la identificación de patrones como un medio que favorece el proceso de generalización en edades tempranas, si no que resaltan la potencialidad que éste tiene y de forma particular la identificación de patrones gráficos (visualmente) y musicales (auditivamente).

Los indicadores rediseñados del KMT, responden a que los profesores dieron evidencia de un conocimiento que precisa el tipo de actividades (lúdicas y concretas donde se deduzcan patrones) y ejemplos de materiales (tangram y rompecabezas) que apoyan el proceso de generalización. Así como el conocimiento de las potenciales que tienen éstos tomando en cuenta el nivel de desarrollo cognitivo que tienen los estudiantes en esos grados escolares.

Tanto en el subdominio KFLM y KMT, los rediseños pueden derivarse de conjuntar la experiencia que los profesores tuvieron al resolver las actividades de generalización de patrones y relaciones funcionales con el conocimiento que los profesores poseen en términos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los primeros grados. Retomando este conocimiento para situarlo en el desarrollo del proceso de generalización.

De igual forma la precisión de los indicadores *a priori* se pueden deber a que en su diseño se consideraron aspectos generales del aprendizaje y la enseñanza del proceso de generalización, mientras que las respuestas de los profesores brindaron precisiones sobre aspectos como el conocimiento sobre los diferentes tipos de actividades, materiales, recursos, ayudas que pueden favorecer la identificación de regularidad y la extensión del razonamiento a casos indeterminados.

Finalmente, en el KMLS los rediseños respondieron al conocimiento profundo del currículo 2017, anterior al nuevo programa de estudios, por lo que tanto la categoría de *resultados de aprendizaje esperado* como la de *secuencia de temas* se ajustaron a éste. Los indicadores a priori se diseñaron tomando en cuenta el nuevo plan de estudios, sin embargo, al ser relativamente reciente los profesores no cuentan con un conocimiento profundo sobre este. El que los profesores tengan un conocimiento amplio del programa de estudios 2017, también se deriva de los años que llevan impartiendo los primeros grados ya que esto les da cierto dominio sobre los temas que se abordan en este nivel.

En general hubo 20 indicadores *a posteriori*, los cuales se organizan en la siguiente tabla de acuerdo con los dominios y subdominios del MTSK.

Tabla 14

Concentrado de indicadores a priori rediseñados y obtención de indicadores a posteriori.

<table>
<tr><th>Dominio</th><th>Subdomin</th><th>Categoría</th><th>Indicador a priori</th><th>Indicador a posteriori</th></tr>
<tr><td rowspan="8">MK</td><td rowspan="8">KoT</td><td>Fenomenología</td><td>KoT 1. Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación.</td><td>KoT 1. Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación en problemas aditivos y multiplicativos.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Registros de representación</td><td>KoT 9. Conocer que un registro para expresar una generalización es el verbal.</td><td>KoT 5. Saber expresar el proceso de generalización a través de un registro verbal.</td></tr>
<tr><td>KoT 10. Conocer que un registro para expresar una generalización es el pictórico.</td><td>KoT 6. Saber ilustrar una expresión algebraica a través de un registro pictórico a través de dibujos.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">KoT 11. Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización en patrones es el simbólico.</td><td>KoT 7. Saber expresar la relación entre el número de elementos de un término de una secuencia y su posición a través de un registro simbólico.</td></tr>
<tr><td>KoT 8. Saber expresar la generalización de una secuencia con patrón geométrico a través del registro simbólico.</td></tr>
<tr><td>KoT 9. Saber expresar el patrón o regularidad de una secuencia a través de un registro simbólico.</td></tr>
<tr><td>KoT 10. Saber que la extensión del razonamiento a casos indeterminados en una relación funcional puede ser expresado a través del registro simbólico.</td></tr>
<tr><td>KoT 11. Saber expresar la relación entre las variables de una función a través de un registro simbólico.</td></tr>
</table>

		Definiciones	**KoT 11.** Conocer que el pensamiento algebraico se define como un proceso en el que los alumnos generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de ejemplos particulares, establecen esta generalización a través de la argumentación, y la expresan gradualmente de una forma simbólica apropiada para su edad.	**KoT 13.** Conocer que la definición de pensamiento algebraico conlleva la designación simbólica de sus objetos, la manera específica de nombrarlos o referir a ellos.
			KoT 12. Conocer que la generalización se define como el proceso que lleva el razonamiento a un nivel en el que la atención ya no se centra en los casos en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones existentes entre ellos para aplicarlo a todos los casos.	**KoT 14.** Conocer que una forma de definir la generalización es como el proceso por el cual se hace un análisis de lo simple a lo complejo.
		Procedimientos	**KoT 19.** Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó, extender el razonamiento a casos indeterminados.	**KoT 21.** Conocer que un procedimiento para continuar una secuencia es identificar el patrón de crecimiento o regularidad de la secuencia.
				KoT 22. Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad y extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.
				KoT 23. Conocer que un procedimiento para expresar la relación entre las variables de una función en casos indeterminados es extender el razonamiento generado en los casos determinados a los indeterminados.
	KSM	*Conexiones de simplificación*	**KSM 1.** Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer o segundo grado de primaria a través del conteo y la agrupación.	**KSM 1.** Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de secuencias con patrones geométricos y problemas aditivos con una variable.
				KSM 2. Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de segundo grado de primaria a través de las secuencias numéricas, problemas aditivos y multiplicativo y el conteo.
	KFLM	*Teorías de aprendizaje de las*	**KFLM 2.** Conocer que una forma de aprendizaje del proceso de generalización es a través de identificar patrones con sonidos.	**KFLM 1.** Conocer la potencialidad que tiene para el aprendizaje del proceso de generación la identificación de patrones musicales y gráficos.

PCK	**KMT**	*Formas de enseñanza*	**KMT 2.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso actividades con patrones musicales.	**KMT 1.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de actividades lúdicas y concretas, donde los estudiantes deduzcan patrones.
		Recursos y materiales	**KMT 7.** Conoce la potencialidad del uso de materiales concretos para favorecer el proceso de generalización.	**KMT 10.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de materiales concretos que puedan dar sentido a las situaciones que involucran una expresión algebraica. **KMT 11.** Conocer la potencialidad del uso de materiales concretos como el tangram y los rompecabezas para favorecer el proceso de generalización en patrones geométricos. **KMT 12.** Conocer la potencialidad del material concreto para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función. **KMT 13.** Conoce la potencialidad del uso de tablas y material concreto para favorecer el proceso de generalización.
	KMLS	*Resultados de aprendizaje esperado*	**KMLS 1.** Conoce los **Procesos de Desarrollo de Aprendizaje** (PDA) del programa 2022 para primer grado y segundo grado que pueden favorecer el desarrollo del proceso de generalización.	**KMLS 1.** Conocer que de acuerdo al programa de estudios 2017 para primer grado los estudiantes deben “resolver problemas que implican hacer sumas y restas” y “solucionar problemas que implican hacer multiplicaciones de un dígito”.
		Secuencia de temas	**KMLS 3.** Conocer que los PDA de primer grado y segundo grado tiene secuencia con los PDA de 3ero “identificar y representar regularidades presentes en la naturaleza”.	**KMLS 2.** Conocer que de acuerdo al programa de estudios 2017 el tema de secuencias de figuras (abordado en primero y segundo de primaria) tiene continuidad con secuencias numéricas (abordados en grados posteriores)

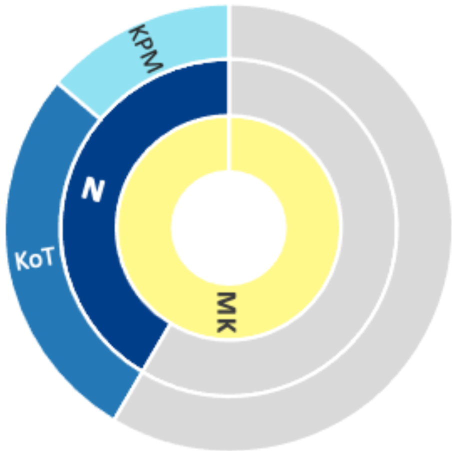
5.1.4. Indicadores nuevos

Un resultado más se encuentra ligado al surgimiento de indicadores nuevos que no fueron contemplados dentro del diseño de indicadores a priori.

En el dominio MK surgieron 12 nuevos indicadores, ocho pertenecen al subdominio KoT y cuatro al KPM. Mientras que en el subdominio KSM no se encontró ningún indicador nuevo.

Figura 27

Gráfica de indicadores nuevos MK.



Fuente: elaboración propia.

Dentro del KoT, los indicadores que surgieron se encuentran en las categorías de *registros de representación, definiciones* y *procedimientos*. El indicador *a posteriori* KoT 12, surge del conocimiento que los profesores tienen sobre el registro de representación gráfico para ilustrar una expresión algebraica. Los profesores pusieron en acción este conocimiento para dar sentido a la expresión algebraica, comprenderla y a partir de ello poder plantear una situación para darle sentido. Este conocimiento pudo surgir de la experiencia que tienen con este tipo de representaciones en los grados que imparte, donde se le da sentido a conceptos o procedimientos de manera gráfica.

En la categoría de *definiciones*, los indicadores *a posteriori* KoT 15 y KoT 16 surgieron del conocimiento sobre conceptos importante dentro del Álgebra como constante e incógnita. Estos no fueron considerados en los indicadores *a priori*, ya que se consideró estaban inmersos en otro de los indicadores KoT 6, sin embargo, dentro del discurso se identificó el uso que los profesores dan de los conceptos, por lo que se considera un conocimiento algebraico importante que merece ser considerado dentro de los indicadores. Es común que cuando se habla de Álgebra salten dichos conceptos, por la relación que damos a esta rama con las expresiones algebraicas que se encuentran compuestas de constantes y variables (más familiarmente usada con uno de sus significados el de incógnita). Por esta razón se considera que es un conocimiento que se puso en acción.

En cuanto a la categoría de *procedimiento*, ésta fue en la que hubo mayor cantidad de nuevos indicadores ya que los profesores dieron cuenta de una variedad de conocimiento al respecto. Para dar respuesta a las actividades pusieron en acción más de un conocimiento relacionado con los procedimientos. Sin embargo, es importante señalar que dichos indicadores refieren en su mayoría al uso de estrategias recursivas, que de acuerdo con Stacey (1989), constituyen un tipo de estrategias usadas por los estudiantes en un nivel básico dentro del proceso de generalización. El surgimiento de estos indicadores puede encontrarse relacionado con la familiaridad que los profesores tienen en este nivel con el uso del conteo, la agrupación, la representación gráfica, etc.

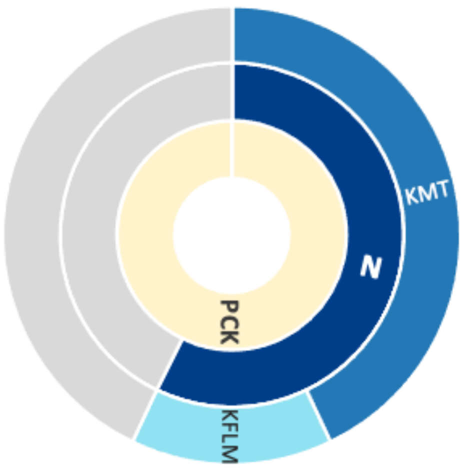
En lo que respecta al subdominio KPM, los indicadores que surgieron tienen que ver con el conocimiento estrategias heurísticas. Este conocimiento fue puesto en acción por parte de los profesores para comprender las situaciones planteadas en las actividades, identificar el patrón y realizarla inversión del proceso. Dado que a pesar de que son actividades en las cuales tienen experiencia (por el uso de secuencias, por ejemplo), la solución a éstas muchas veces no se extiende hasta la generalización, solo aplicando a unos casos y no lo indeterminado. Por lo cual los profesores tienen que recurrir a conocimientos sobre heurísticas para comprender, razonar y extender tal razonamiento.

Lo que las respuestas de los profesores dejaron en evidencia, fue que el conocimiento sobre las prácticas matemáticas les permitió comprender las situaciones para posteriormente resolverlas; aspecto que no se contempló derivado de los hallazgos encontrados en la literatura en la cual poco se ha considerado al respecto en términos de este subdominio.

En el dominio PCK surgieron ocho nuevos indicadores, dos indicadores en el subdominio KFLM y seis indicadores en el KMT.

Figura 28

Gráfica de indicadores nuevos MK.



Fuente: elaboración propia.

En el subdominio KFLM uno de los indicadores se encuentra en la categoría de *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*, el cual surge derivado de conocer que uno de los elementos fundamentales del proceso de generalización es la identificación de la propiedad común o regularidad que permite establecer la relación entre las variables involucradas, por lo que si ésta no se identifica adecuadamente puede derivar en un proceso de generalización erróneo. Mientras que el otro se encuentra en la categoría de *formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático*, el cual se puede considerar que surge de la misma experiencia del profesor con la resolución de las actividades del instrumento, pues observar la relación entre los datos variantes e invariantes es una forma de interacción que los mismos profesores realizaron para llevar a cabo su proceso de generalización.

En lo que respecta al KMT, en la categoría de *formas de enseñanza*, los indicadores precisan el tipo de actividades, estrategias, usos del contexto y tipo de lenguaje que favorece el proceso de generalización. Mientras que en la categoría de *ejemplos y ayudas* se hace énfasis en la forma en cómo los estudiantes pueden alcanzar el proceso de generalización a través del uso de materiales concretos y representaciones gráficas.

Tanto en el KFLM como en el KMT, se puede inferir que los nuevos indicadores surgen motivados por la experiencia que los profesores tuvieron con la resolución de las actividades, ya que antes de diseñar actividades y discutir sobre los recursos a emplear con estudiantes, los profesores llevaron a cabo su propio proceso de generalización, lo que se puede considerar les dio elementos para trasladar esto son sus estudiantes y conjuntar dicha experiencia con el conocimiento que ya tenían en términos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los primeros grados.

En total hubo una cantidad de 17 nuevos indicadores, los cuales se concentran en la siguiente tabla, organizados en los dominios y subdominios del MTSK.

Tabla 15

Concentrado de indicadores nuevos.

Dominio	Subdomin	Categoría	Indicadores nuevos
MK	KoT	*Registros de representación*	**KoT 12.** Saber expresar la relación entre las variables de una relación a través de un registro tabular.
		Defini ciones	**KoT 17.** Saber lo que es una constante (definición)
			KoT 18. Saber lo que es una incógnita (definición)
		Procedimientos	**KoT 24.** Conocer que un procedimiento para generalizar una secuencia es a través de estrategias proporcionales.
			KoT 25. Conocer que un procedimiento para construir una expresión de generalización es identificar el patrón de crecimiento y determinar los valores variantes e invariantes en dicho patrón.

			KoT 26. Conocer que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es identificar elementos comunes en casos particulares a través de la manipulación aritmética.
			KoT 27. Conocer que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es a través del uso de tablas.
			KoT 28. Conocer que un procedimiento para construir una situación en la que una expresión algebraica tenga sentido, es identificar los datos invariantes y variantes en la expresión.
	KPM	*Prácticas ligadas a una temática en específico*	**KPM 4.** Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para evaluar una expresión de generalización en una relación funcional.
			KPM 5. Conocer que una estrategia heurística para hacer una inversión del proceso en la generalización de patrones es darle asignar valores a n para acercarse a $f(n)$.
			KPM 6. Conocer que una estrategia heurística para comprender una expresión algebraica es dar un valor a la variable y operar aritméticamente.
			KPM 7. Conocer que una estrategia heurística para generalizar una secuencia es descomponer aritméticamente los términos de la secuencia.
PCK	**KFLM**	*Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*	**KFLM 3.** Conocer que un error que los estudiantes pueden comenter al generalizar es no tomar conciencia de la propiedad común.
		Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático	**KFLM 4.** Conocer que una forma en la que los estudiantes pueden desarrollar su proceso de generalización es observar la relación entre los datos variantes e invariantes.
	KMT	*Formas de enseñanza*	**KMT 3.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de actividades de inferencia, donde los estudiantes deduzcan las relaciones entre los elementos.
			KMT 4. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de contextos cercano a los estudiantes donde una expresión algebraica adquiera sentido.
			KMT 5. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de un lenguaje comprensible para el nivel en el que se encuentra.
			KMT 6. Conocer que una forma de construir una actividad para la enseñanza en la que una expresión algebraica tenga sentido es identificar los datos invariantes y variantes en la expresión.

			KMT 7. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización que los estudiantes planteen sus propias situaciones de relación funcional.
		Ejemplos y ayudas	**KMT 8.** Conocer que una forma de ayuda para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función es a través del uso de materiales concretos y representaciones gráficas.

5.2.Indicadores a posteriori MTSK-proceso de generalización

Derivado de la información obtenida en los análisis y resultados, expuestos anteriormente, se tienen los indicadores *a posteriori* que se enlistan en la siguiente.

Tabla 16

Concentrado de indicadores a posteriori MTSK-proceso de generalización.

Dominio	Sub dominio	Categoría	Indicador a posteriori
MK	KoT	*Fenomenología*	**KoT 1.** Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación dependiente de problemas aditivos y multiplicativos.
		Propiedades y sus fundamentos	**KoT 2.** Conocer la propiedad distributiva.
			KoT 3. Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad
			KoT 4. Conocer que una expresión algebraica se encuentra conformada por variables y constantes.
		Registros de representación	**KoT 5.** Saber expresar el proceso de generalización a través de un registro verbal.
			KoT 6. Saber ilustrar una expresión algebraica a través de un registro pictórico a través de dibujos.
			KoT 7. Saber expresar el proceso de generalización a través del registro simbólico. **KoT 8.** Saber expresar la relación entre el número de elementos de un término de una secuencia y su posición a través de un registro simbólico. **KoT 9.** Saber expresar el patrón o regularidad de una secuencia a través del registro simbólico. **KoT 10.** Saber expresar la extensión del razonamiento a casos indeterminados en una relación funcional a través del registro simbólico **KoT 11.** Saber expresar la relación entre las variables de una función a través de un registro simbólico.
			KoT 12. Saber expresar la relación entre las variables de una relación a través de un registro tabular.
		Definiciones	**KoT 13.** Conocer que la definición de pensamiento algebraico conlleva la designación simbólica de sus objetos, la manera específica de nombrarlos o referir a ellos.
			KoT 14. Conocer que una forma de definir la generalización es como el proceso por el cual se hace un análisis de lo simple a lo complejo.

			KoT 15. Saber lo que es una secuencia (definición)
			KoT 16. Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización.
			KoT 17. Saber lo que es una constante (definición)
			KoT 18. Saber lo que es una incógnita (definición)
		Procedimientos	**KoT 19.** Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva.
			KoT 20. Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b$ $(b =/0)$.
			KoT 21. Conocer que un procedimiento para continuar una secuencia es identificar el patrón de crecimiento o regularidad de la secuencia.
			KoT 22. Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad y extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.
			KoT 23. Conocer que un procedimiento para expresar la relación entre las variables de una función en casos indeterminados es extender el razonamiento generado en los casos determinados a los indeterminados.
			KoT 24. Conocer que un procedimiento para generalizar una secuencia es a través de estrategias proporcionales.
			KoT 25. Conocer que un procedimiento para construir una expresión de generalización es identificar el patrón de crecimiento y determinar los valores variantes e invariantes en dicho patrón.
			KoT 26. Conocer que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es identificar elementos comunes en casos particulares a través de la manipulación aritmética.
			KoT 27. Conocer que un procedimiento para deducir la relación entre las variables de una relación funcional es a través del uso de tablas.
			KoT 28. Conocer que un procedimiento para construir una situación en la que una expresión algebraica tenga sentido, es identificar los datos invariantes y variantes en la expresión.
	KSM	*Conexiones de simplificación*	**KSM 1.** Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer grado de primaria a través de secuencias con patrones geométricos y problemas aditivos.
			KSM 2. Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de segundo grado de primaria a través de las secuencias numéricas, problemas aditivos y multiplicativo y el conteo.
	KPM	*Prácticas ligadas a una temática en específico*	**KPM 1.** Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.
			KPM 2. Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones.
			KPM 3. Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización.
			KPM 4. Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para evaluar una expresión de generalización en una relación funcional.
			KPM 5. Conocer que una estrategia heurística para hacer una inversión del proceso en la generalización de patrones es darle asignar valores a n para acercarse a $f(n)$
			KPM 6. Conocer que una estrategia heurística para comprender una expresión algebraica es dar un valor a la variable y operar aritméticamente.
			KPM 7. Conocer que una estrategia heurística para generalizar una secuencia es descomponer aritméticamente los términos de la secuencia.

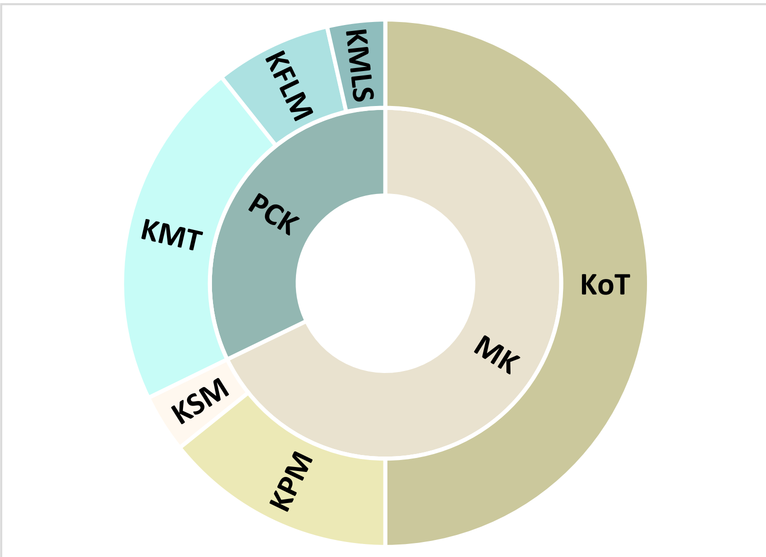
		Prácticas ligadas a la	**KPM 8.** Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.
PCK	**KFLM**	*Teorías de aprendizaje*	**KFLM 1.** Conocer la potencialidad que tiene para el aprendizaje del proceso de generalización la identificación de patrones musicales y gráficos.
			KFLM 2. Conocer los contenidos matemáticos previos que puede retomar para diseñar una situación y fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico.
		Fortalezas y dificultades	**KFLM 3.** Conocer que un error que los estudiantes pueden comenter al generalizar es no tomar conciencia de la propiedad común.
		Formas en que los alumnos interactúan	**KFLM 4.** Conocer que una forma en la que los estudiantes pueden desarrollar su proceso de generalización es observar la relación entre los datos variantes e invariantes.
	KMT	*Formas de enseñanza*	**KMT 1.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de actividades lúdicas y concretas donde los estudiantes deduzcan patrones.
			KMT 2. Conocer la potencialidad que tiene en la enseñanza del proceso de generalización el uso de situaciones de variación.
			KMT 3. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de actividades de inferencia, donde los estudiantes deduzcan las relaciones entre los elementos.
			KMT 4. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de contextos cercano a los estudiantes donde una expresión algebraica adquiera sentido.
			KMT 5. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de un lenguaje comprensible para el nivel en el que se encuentra.
			KMT 6. Conocer que una forma de construir una actividad para la enseñanza en la que una expresión algebraica tenga sentido es identificar los datos invariantes y variantes en la expresión.
			KMT 7. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización que los estudiantes planteen sus propias situaciones de relación funcional.
		Ejemplos y ayudas	**KMT 8.** Conocer que una forma de ayuda para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función es a través del uso de materiales concretos y representaciones gráficas.

		Recursos y materiales	**KMT 9.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso de materiales concretos que puedan dar sentido a las situaciones que involucran una expresión algebraica. **KMT 10.** Conocer la potencialidad del uso de materiales concretos como el tangram y los rompecabezas para favorecer el proceso de generalización en patrones geométricos. **KMT 11.** Conocer la potencialidad del material concreto para que los estudiantes identifiquen la relación entre las variables de una función. **KMT 12.** Conoce la potencialidad del uso de tablas y material concreto para favorecer el proceso de generalización.
	KMLS	*Resultados de aprendizaje*	**KMLS 1.** Conocer que de acuerdo al programa de estudios 2017 para primer grado los estudiantes deben "resolver problemas que implican hacer sumas y restas" y "solucionar problemas que implican hacer multiplicaciones de un dígito".
		Secuencia de temas	**KMLS 2.** Conocer que de acuerdo al programa de estudios 2017 el tema de secuencias de figuras (abordado en primero y segundo de primaria) tiene continuidad con secuencias numéricas (abordados en grados posteriores)

La frecuencia de los conocimientos en acción que son plasmados en los *indicadores a posteriori*, de acuerdo con los dominios y subdominios del MTKS, se puede observar en la figura 28. En el gráfico es posible observar que existe una mayor presencia del dominio MK, con 38 indicadores de los cuales 28 pertenecen al KoT, 2 al KSM y 8 al KPM. Mientras que del PCK se pusieron en acción 18 indicadores, de los cuales 12 pertenecen al KMT, 4 al KFLM y 2 al KMLS.

Figura 29

Gráfica de indicadores conocimientos puestos en acción del MTSK.



Fuente: elaboración propia

5.3.Conexiones entre los indicadores evidenciados (a priori, rediseñados y nuevos)

Como parte de los resultados también es posible encontrar conexiones entre los indicadores relacionadas con aspectos del proceso de generalización tales como los momentos del proceso de generalización (Radford, 2008), los tipos de tareas del proceso de generalización (Stacey, 1989) y los tipos de generalización (Radford, 2008).

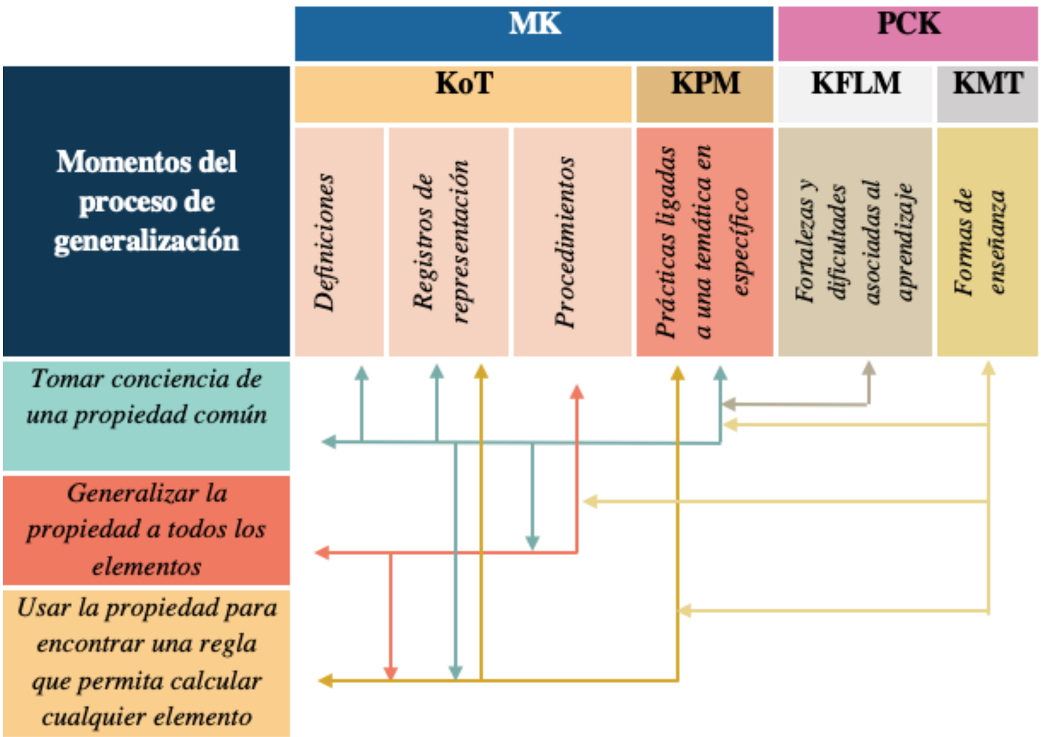
En los siguientes apartados se presentan y explican las conexiones entre los indicadores *a posteriori* de acuerdo con tales aspectos.

5.3.1. Conexiones entre indicadores de conocimientos puestos en acción en los momentos del proceso de generalización

Los profesores que conformaron el caso pusieron en acción conocimientos del MK que se conectaron para desarrollar cada uno de los momentos del proceso de generalización a fin de resolver las actividades (generalización en patrones y en relaciones funcionales). A su vez, las conexiones establecidas dentro del dominio MK (que permitieron dar respuestas a las actividades) se conectaron con conocimientos del PCK para desarrollar el diseño de una situación dirigida a estudiantes de primero y segundo grado.

Figura 30

Conexiones entre los indicadores a posteriori para desarrollar los momentos del proceso de generalización.



Los subdominios del MK que se conectaron fueron el KoT y KPM, a través de las categorías *definiciones, registros de representación, procedimiento y prácticas ligadas a una temática en específico*.

El conocimiento sobre *definiciones* de conceptos importantes de la generalización como patrón, regularidad o secuencia (KoT 13-14), favorecieron la identificación de la propiedad común (en una secuencia o relación funcional), pues los profesores conocían, desde su definición, lo que estaban buscando ("lo que se repite").

Saber lo que es un patrón o regularidad, favorece identificarlo, sin embargo, no basta con reconocerlo, y es aquí donde se conecta otro indicador muy importante "KPM 1. Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización". De esta manera toda vez reconocida la regularidad fue importante que los profesores tomaran conciencia de su papel dentro del proceso de generalización, reconociendo que esta regularidad les permitiría continuar con la secuencia o la relación funcional.

Dicha conciencia sobre la propiedad común es verbalizada, al poner en acción el conocimiento sobre los *registros de representación* (KoT 5), de esta forma los profesores dejan registro de la propiedad encontrada, el cual apoyará más adelante a desarrollar los siguientes momentos del proceso de generalización.

La conexión expuesta de los conocimientos del KoT y el KPM, no solo permitieron desarrollar el primer momento del proceso de generalización, sino que constituyeron una red que apoyó al desarrollo del segundo momento "generalizar la propiedad a todos los elementos".

El reconocimiento, toma de conciencia y verbalización de la propiedad común, llevó al desarrollo de conocimientos de *procedimientos* en el que se retomara ésta para generalizarla a otros casos (términos de una secuencia o relación funcional) a través de aproximaciones recursivas (KoT 19), esquemas lineales (KoT 20) o estrategias proporcionales (KoT 26).

Y a su vez esta nueva conexión conformó una base de conocimiento para poder alcanzar el último momento del proceso de generalización "usar la propiedad para encontrar una regla que permita calcular cualquier elemento". Los profesores retomaron el conocimiento puesto en acción en el segundo momento para comprender la relación entre las variables para casos cercanos, lejanos y finalmente conectar estos razonamientos a casos indeterminados a través de conocimientos de *procedimiento*s en los que se extendiera el razonamiento (KoT 23-24) y en este ejercicio tomara sentido el proceso de generalización a través de un conocimiento sobre el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados (KPM 3) para encontrar una regla con la que sea posible calcular cualquier elemento a través de un *registro de representación* simbólico (KoT 7-11).

La conexión de los conocimientos del dominio MK muestra una evolución, ya que las conexiones que hacen posible el primer momento constituyen un antecedente para lograr los siguientes momentos y a su vez conectarse con otros indicadores. De esta manera es posible identificar que los profesores pasan por cada uno de los momentos del proceso de generalización haciendo uso del conocimiento sobre *definiciones, registros de representación, procedimientos y prácticas ligadas a una temática en específico*.

Los resultados de este trabajo también revelan como esta red de conexiones del conocimiento MK no solo apoyan a desarrollar el proceso de generalización de los profesores, sino que también se conectan con conocimientos del dominio PCK para apoyar en el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza del proceso de generalización.

Dicha conexión se hace evidente a través de los subdominios KFLM y KMT. Los profesores dieron cuenta de conocer los posibles errores que los estudiantes pueden cometer al generalizar, como lo es no tomar conciencia de la propiedad común (KFLM 4), sin embargo, para poder dar cuenta de este conocimiento es importante que los profesores tengan conocimientos del dominio MK como los expuestos, ya que esto le permite identificar el papel que tienen dentro del proceso de generalización, y por lo tanto calificar la importancia de tomar conciencia de la propiedad común.

También las conexiones de conocimiento MK permiten que los profesores desarrollen conocimiento de tipo KMT pues llevar a cabo cada uno de los momentos del proceso de generalización a través de la conexión de los conocimientos les permite conocer la potencialidad que tienen para la enseñanza el uso de ciertas actividades, materiales y recursos (KMT 1-8) que pueden conectar con el proceso desarrollado por ellos mismos a través del KoT y KPM. Se puede interpretar, que haber desarrollado cada uno de los momentos del proceso de generalización, permite que los profesores conecten este conocimiento con el correspondiente a la enseñanza, de esta forma reconocen la potencialidad de actividades, recursos y contextos para el desarrollo del proceso de generalización.

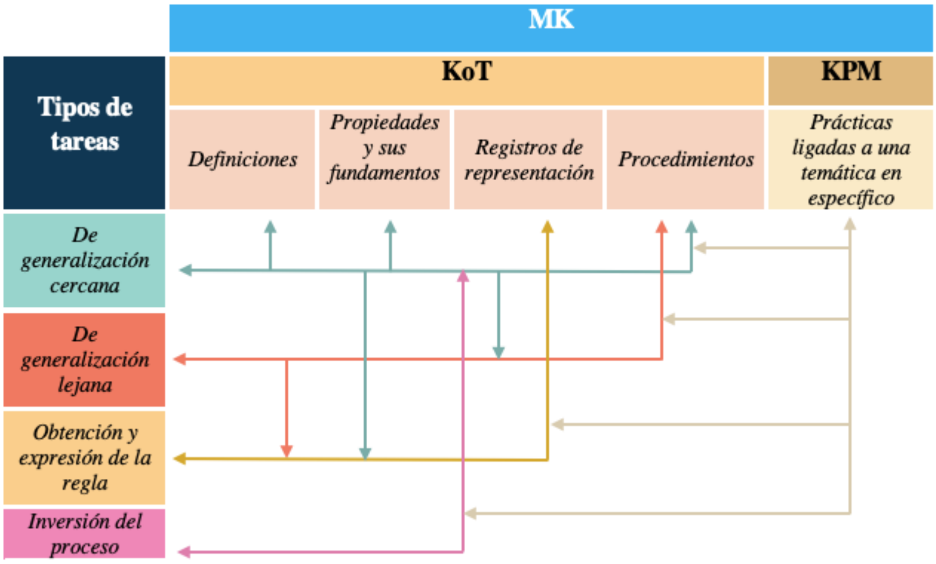
De estos resultados se puede interpretar que para poder llevar a cabo cada uno de los momentos del proceso de generalización los profesores no pusieron en acción conocimientos del MK de forma aislada, sino que se conectaron para construir una red de conocimientos que favoreciera el proceso de generalización. También se rescata que el conocimiento MK se conecta con el PCK, al generar un antecedente de conocimiento matemático *per se* que puede trasladar al campo de la enseñanza y el aprendizaje.

5.3.2. Conexiones al resolver los tipos de tareas de generalización (Stacey, 1989).

En lo que respecta a las tareas de generalización, los profesores pudieron en acción conocimientos del MK que se conectaron para comprenderlas y resolverlas a través de los indicadores KoT y KPM en sus categorías de *propiedades y sus fundamentos*, *definiciones, registros de representación, procedimiento y prácticas ligadas a una temática en específico*.

Figura 31

Conexiones entre los indicadores a posteriori para resolver tareas de generalización.



En la solución a los tipos de tareas enunciados por Stacey (1989), de igual manera que en el desarrollo de los momentos del proceso de generalización enunciados por Radford (2008), el conocimiento sobre las *definiciones* (de patrón y secuencia) (KoT 13-14), jugó un papel fundamental, ya que, desde definición de patrón o regularidad permitió a los profesores identificarlo en las tareas dadas para poder comenzar el proceso de generalización.

Sin embargo, no bastó con conocer lo qué es una regularidad y su identificación, sino que es fue importante que los profesores pusieran en acción su conocimiento sobre *propiedades y sus fundamentos*, de forma específica conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad (KoT 5). Conocer lo anterior, permitió que la identificación de la regularidad usara a través del conocimiento de procedimientos para dar respuesta, en un primer momento, a tareas de generalización cercanas (KoT 19), a través de aproximaciones recursivas, y posteriormente a tareas de genelización lejanas (KoT 20) por medio de esquemas lineales.

Por su parte, los conocimientos puestos en acción para dar respuesta a este tipo de tareas, contituyeron un fundamento que permitieron extender el razonamiento generado, en los dos primeros tipos de tareas, y usarlo para obtener una regla general. Esta red de conocimientos se conecta (como se vió en los momentos de generalización) para, a su vez, poner en acción conocimientos de *procedimientos* (KoT 23-24) y llevar el razonamiento a lo indeterminado, logrando formular una regla general a través de un *registro de representación* simbólico (KoT 6-11) que resumió todo el proceso de generalización.

En lo que respecta a las tareas de inversión del proceso, si bien la conexión de conocimientos generada pudo favorecer la solución de este tipo de tarea a través de la regla general obtenida, los profesores presentaron dificultades. Éstos no emplearon la regla general, sino que retomaron la conexión establecida en las tareas de generalización cercana, y recurrieron a *estrategias recursivas* (KoT 19) e incluso heurísticas (KPM 4), que propiciaron que el proceso para dar respuesta fuera más largo de lo que pudiera ser.

Por su parte, el subdominio KPM permeó en la solución a los diferentes tipos de tareas de generalización (KPM 1, 2, 4, 6), ya que el conocer el papel de la toma de conciencia de una propiedad común y de la extensión del razonamiento a casos indeterminados favoreció lograr el proceso de generalización en cada una de las tareas de generalización cercanas y lejanas.

5.4. Discusión de resultados.

De acuerdo con los resultados, los profesores pusieron en acción indicadores de conocimiento pertenecientes a los diferentes dominios y subdominio del modelo MTKS. En algunos casos los indicadores *a priori* se encontraron de la forma esperada, en otros tuvieron que ser rediseñados, de acuerdo con los datos encontrado en los cuestionarios, y también surgieron nuevos.

Sin embargo, ¿cuál es la relevancia de estos resultados en términos del proceso de generalización de los profesores de primero y segundo de primaria? ¿qué podemos interpretar de estos resultados? ¿a qué se deben? ¿de qué forma se encuentran relacionados con el estado del arte de este trabajo?

5.4.1. Discusión sobre los indicadores del dominio MK

Comenzando por los resultados del **subdominio KoT** en la categoría de ***fenomenología***, el indicador de conocimiento puesto en acción (KoT 1) refleja el conocimiento que los profesores tienen respecto a los temas y contextos que pueden dar sentido a una expresión algebraica, como lo es las situaciones de variación. Al respecto, Mason (1999) señala que las situaciones de variación en general y las que involucran dos variables relacionadas que covarían son contextos que permiten el desarrollo del proceso de generalización. Por lo que este tipo de conocimiento del profesor es de relevancia para el desarrollo de una propuesta como *Early Algebra*, pues le permite ubicar fenomenológicamente temas algebraicos en los primeros grados.

Por otro lado, la ubicación fenomenológica que los profesores hacen sobre la expresión algebraica en una situación de variación también brinda información respecto al conocimiento que tienen sobre la interpretación de una expresión algebraica ya que esta favoreció encontrar una situación que se ajustara a la misma. A diferencia de lo encontrado por Hohensee (2017), quien destaca que uno de los desafíos a los que se enfrentan los futuros profesores es identificar las relaciones contenidas en las expresiones algebraicas, los docentes que constituyeron la muestra de este estudio dieron evidencia de la movilización de conocimientos sobre *procedimientos* (KoT 30) y de *registros de representación* (KoT 12) para comprender el sentido de la expresión algebraica y de las relaciones que subyacían, lo cual permitió ubicar la expresión en una situación en la que tuviera sentido para los estudiantes.

Sin embargo, es importante señalar que a pesar de que las ubicaciones fenomenológicas de las expresiones algebraica apuntaron hacia situaciones de variación, las preguntas que los profesores plantearon sobre las situaciones que diseñaron se limitaron a tareas de generalización cercanas, por lo que potenciar el proceso de generalización a través de su propuesta se ven reducido. Este hecho permite reflexionar sobre la importancia de aprovechar el conocimiento que los profesores ponen en juego, con este tipo de actividades, para desarrollar primero en ellos el proceso de generalización y que puedan proyectarlo en diseños cada vez más completos.

Por su parte los conocimientos sobre los ***registros de representación*** dieron cuenta del **tipo de generalización**, factual, contextual o simbólica (Radford 2006), que accionaron los profesores. De acuerdo, con la conceptualización de Radford (2006), se puede afirmar que los tipo de generalización manifestado correspondieron al tipo contextual, ya que expresaron el proceso de generalización de forma verbal (evidencia [2, C.3.3,a])y simbólico puesto que emplearon expresiones simbólicas para expresar la relación entre las variables de las relaciones (evidencia [2, C.4.4, a]).

Lo anterior puede deberse a que el instrumento principal de recogida de datos fue un cuestionario escrito, por lo cual es más complejo identificar un tipo de generalización factual, ya que esta se manifiesta principalmente a través de los gestos y el movimiento.

De los tipos de generalización identificados (contextual y simbólico) se hace evidente una evolución, ya que estos indicadores aparecieron de manera progresiva. Los profesores inicialmente verbalizaron/escribieron el patrón o regularidad identificada y cómo este permite establecer una relación entre la posición del término de una secuencia y su número de elementos (KoT 5). Posteriormente dicha verbalización evolucionó a símbolos, de tal forma que la indeterminación se hace explícita a través de los símbolos (KoT 7-11).

La evolución aquí señalada corresponde con lo sostenido por Rojas y Vergel (2013), quienes afirman que el proceso de generalización es progresivo y evolutivo, yendo de lo gestual a la palabra y de la palabra al simbolismo. En los resultados de este trabajo podemos ver esa evolución que, aunque en este caso se identifica solo de la palabra al simbolismo, podemos observar que la verbalización ayuda a lograr el simbolismo como una manera de sintetizar lo que se dice a través de la palabra (evidencias [2, C.1.1, a] [2, C.1.2, a]).

A pesar de que investigaciones revelan los errores que los Estudiantes Para Maestro de nivel primaria presentan al obtener una regla general (Zapatera, 2017); o que el vacío que existe entre reconocer un patrón y expresarlo simbólicamente (Zazkis y Liljedahl, 2002), los resultados de este trabajo muestran que cuando los profesores verbalizan el análisis del patrón de crecimiento de una secuencia o de las relaciones que guardan las variables en una relación funcional, pueden obtener con mayor facilidad una expresión de generalización (evidencias [1, C.4.2, c] [1, C.4.5, c]).

.

De igual forma, los ***registros de representación*** brindaron información sobre las **acciones del proceso de generaliz**ación (Mason, 1999) de manera específica en lo que refiere a "decir, la exposición verbal de la regularidad" y "registrar, expresar de forma escrita la regularidad", ya que a través de los registros verbales y simbólicos (KoT 5 y KoT 7-11) se expresó la regularidad identificada.

En suma, los conocimientos sobre registros de generalización favorecieron la identificación el tipo de generalización que se encuentran desarrollando los profesores y la evolución de éstas. Es importante recalcar que, aunque no es necesario pasar por un tipo de generalización antes que otro (es decir no son etapas), este trabajo deja de manifiesto cómo pueden apoyarse uno a otro para desarrollar los diferentes tipos y, en suma, lograr el proceso de generalización.

Por su parte, los conocimientos sobre ***definiciones*** de conceptos relevantes dentro *Early Algebra*, si bien favorecieron los momentos del proceso de generalización (como se expuso en el apartado de conexiones entre indicadores), este conocimiento también permitió obtener información respecto a la postura que los profesores de primero y segundo grado tienen respecto del pensamiento algebraico y los procesos que implica, como la generalización. Así como el uso que dan, desde el discurso, a conceptos importantes como lo son secuencia, patrón, relaciones funcionales, constantes, variables, incógnitas.

De acuerdo con los resultados del estudio realizado por Stephens (2008) sobre las concepciones de futuros maestros de primaria sobre el Álgebra, encontró que éstas son limitadas, equiparando ésta únicamente con la manipulación de símbolos. Los resultados obtenidos con el trabajo aquí presentado reafirman lo encontrado en el trabajo de Stephens, ya que las concepciones de los profesores sobre la definición Pensamiento Algebraico manifiestan una fuerte carga a la parte simbólica que, aunque es un elemento importante en este tipo de pensamiento (Radford, 2006), este es considerado el resultado de un proceso de análisis de las relaciones subyacentes en las operaciones, expresiones, ecuaciones o datos de funciones, y no el elemento central.

Incluso, es importante señalar que la designación simbólica no se refiere al uso exclusivo de "letras", como esa primera imagen que se viene a nuestra mente al escuchar la palabra Álgebra, sino que autores como Radford (2006), la define como la forma específica de nombrar los objetos y esto puede realizarse a través, incluso, de lo pictórico. De acuerdo con las respuestas obtenidas de los profesores, el simbolismo para ellos es equiparable al uso de "letras" exclusivamente; por lo que es posible interpretar que dicha definición es limitada.

Ocurre un fenómeno similar con el concepto de generalización. De las respuestas obtenidas solo la del Mtro. Fernando se acercó a lo que implica este proceso, sin embargo, aparece de forma limitada pues lo aborda como "un proceso por el cual se hace un análisis de lo simple a lo complejo", excluyendo elementos importantes como la extensión del razonamiento generado en casos determinados a casos indeterminados, el análisis de patrones, procedimientos, estructuras y relaciones (Kaput, 1999).

Las limitaciones en el conocimiento sobre las definiciones de los conceptos anteriores pueden desencadenar en dificultades de enseñanza del *Early Algebra* ya que puede obstaculizar la correcta interpretación del pensamiento algebraico de los alumnos y del proceso de generalización, tal como lo revela la investigación de Zapatera y Callejo (2013). De aquí la importancia de fortalecer el conocimiento del profesor en término de las definiciones de conceptos importantes dentro del *Early Algebra*.

Por su parte, los profesores evidenciaron conocimiento sobre la definición de conceptos como secuencia, patrón, constantes e incógnitas. Este tipo de conocimiento apoya en acciones del proceso de generalización (Mason, 1999) como "ver la regularidad", o en momentos de este mismo proceso (Ayala y Molina, 2021; Radford, 2008) tal como se expuso en el apartado de conexiones entre los indicadores de conocimiento.

Sin embargo, por otro lado, a pesar de manifestar saber lo que es una incógnita (KoT 18), es importante señalar que dentro del discurso de los profesores usan indistintamente el concepto de variable e incógnita, lo que puede deberse a un conocimiento limitado de los diferentes significados de la variable: incógnita, número general, relación funcional (Ursini et. al, 2005). Esto confirma las conclusiones de Tanisli y Kose (2013) quieres revelan la necesidad de mejorar los conocimientos sobre conceptos relevantes dentro del Álgebra como lo es la variable, ya que esto puede limitar el uso que se dé a la misma e incluso no lograr potenciar el proceso de generalización.

En cuanto a los conocimientos sobre los ***procedimientos*****,** este trabajo revela un mayor número de indicadores en esta categoría. Lo anterior puede deberse a la relación que puede darse entre estos conocimientos los momentos del proceso de generalización (Ayala y Molina, 2021; Radford, 2008), los tipos de tareas de la generalización (Stacey, 1989) y las estrategias de resolución de tareas (Stacey, 1989).

En la categoría de *procedimiento*, podemos relacionar los indicadores de conocimiento en cada uno de los momentos. Así en el primer momento enunciado por Radford (2008) se encuentra el indicador KoT 15, ya se usa como procedimiento para continuar con una secuencia la identificación de propiedad común. En el segundo momento está el indicador KoT 16, puesto que usa como procedimiento extender la propiedad común a otros términos de la secuencia. Y en el tercero se encuentra el indicador KoT 18, pues se construye una expresión de generalización usando la propiedad común.

De esta manera es posible identificar que los profesores pasan por cada uno de los momentos del proceso de generalización haciendo uso del conocimiento sobre los procedimientos.

Sobre lo **tipos de tareas** recordemos que Stacey (1989) menciona que existen cuatro tipos: tareas de generalización cercana, donde se pide calcular el valor $f(n)$ para n pequeños; tareas de generalización lejanas, donde se pide calcular el valor $f(n)$ para n grande; obtención y expresión de la regla general que permita calcular el valor de $f(n)$ para cualquier n; y finalmente, inversión del proceso para hallar el valor n.

De acuerdo con los resultados, podemos relacionar indicadores de conocimiento en cada una de las tareas. Para el primer tipo de tarea se encuentran los indicadores KoT 27 y KoT 35; en el segundo tipo de tareas se encuentran el indicador KoT 28; en el tercer tipo de tarea está el indicador KoT 18; mientras que en el último tipo de tarea se encuentra el indicador KoT 34.

Sin embargo, es importante señalar que, aunque los profesores resolvieron las tareas de inversión del proceso, enfrentaron mayor número de dificultades que en los otros tipos de tarea, incluso no hicieron uso de procedimiento que implicaran una inversión del proceso, sino que emplearon estrategias de tipo recursivas empleadas en los otros tipos de tareas. Este resultado coincide con los reportados por Zapatera (2013) quien sostienen que los profesores resuelven con facilidad tareas de generalización cercana, presentan algunos errores al realizar tareas de generalización lejana, pero tienen un mayor número de dificultades para realizar la inversión del proceso y explicar la regla general.

Finalmente, en lo que respecta a las **estrategias de resolución de tareas** (Stacey, 1989) identificó tres tipos: aproximación recursiva, en la que se usa un método de conteo más o menos sofisticado; aproximación funcional, en la que se relaciona dos variables mediante una expresión matemática de tipo $f(n) = an + b$ $(b \neq 0)$; razonamiento proporcional incorrecto.

Los resultados de este trabajo revelan indicadores de conocimiento en cada una de estas estrategias, mostrando un mayor número en el primer tipo de estrategia. Esto coincide con los hallazgos del trabajo de Stacey (1989) en estudiantes de 9 a 13 años, en el que sostiene que los estudiantes hacen un mayor uso de este tipo de estrategias porque les genera mayor seguridad para comprender las relaciones entre las variables, de esta forma los estudiantes recurren al recuento y el dibujo, lo cual coincide con las estrategias usadas por los profesores.

A pesar de que en el estudio realizado Stacey (1989) no se señala que estas estrategias evolucionen, en los resultados de este trabajo puede notarse esto ya los profesores primeramente recurren a una aproximación recursiva (KoT 13) (evidencia [2, C.1.2, b]) para posteriormente emplear el análisis realizado con este tipo de estrategias y emplear una aproximación funcional (KoT 14) (evidencias [2, C.1.3, b] [2, C.1.4, b])

También es importante resaltar, que en el trabajo de Stacey (1989) se señala el uso, por parte de los estudiantes, un razonamiento proporcional incorrecto. En el trabajo aquí realizado, se pudo identificar que este tipo de estrategias también son empleadas por los profesores, lo que da muestra de ser un conocimiento erróneo que posiblemente es arrastrado desde su experiencia como estudiantes de Educación Básica. Es importante generar la reflexión en los profesores sobre el uso del razonamiento proporcional en la generalización de patrones, a fin de identificar cuando estos razonamientos pueden ser erróneos y por qué, puesto que la resistencia a abandonar ciertas estrategias puede generar un obstáculo que impida generalizar (Lee, 1996).

En lo que respecta al **Subdominio KSM** se encontraron únicamente indicadores de conocimiento de la categoría ***conexiones de simplificación***. Esto puede deberse al conocimiento profundo que los profesores tienen sobre los temas que abordan en el grado que imparten, lo cual permite que conecten una expresión algebraica (contenido avanzado) con un tema previo (que es abordado en primero o segundo de primaria).

Sin embargo, las ***conexiones de complejización*** no lograron identificarse. Lo anterior puede deberse a la estructura del instrumento, cuyas preguntas no permitieron profundizar en este tipo de conocimiento, pero también puede ser derivado del conocimiento limitado que, como algunas investigaciones señalan (Pincheira y Alsina, 2022; Zapatera y Quevedo, 2021) los profesores de este nivel tienen sobre los temas de Álgebra que se ven en niveles más avanzado (secundaria), lo que hace que los profesores presenten dificultades para conectar los temas que ellos abordan en su nivel con un contenido algebraico.

Finalmente, en lo referente al **dominio KPM** se encontró un mayor número de indicadores en la categoría de ***prácticas ligadas a una temática en específico.*** Los indicadores de esta categoría se encontraron relacionados con **los momentos del proceso de generalización** (Ayala y Molina, 2021; Radford, 2008), de forma específica en lo que respecta al conocimiento del papel de la toma de conciencia de una propiedad común y del rol de extender el razonamiento más allá del rango que lo originó.

El análisis de los datos obtenidos arrojó **nuevos indicadores** dentro de este subdominio (KPM 3-5), en lo que respecta al conocimiento de las estrategias heurísticas para generalizar una secuencia y hacer la inversión del proceso. Estos nuevos indicadores dan cuenta del conocimiento de las heurísticas que les permiten comprender las situaciones y dar solución a estas.

Sin embargo, no se encontró el indicador KPM 1, lo cual puede encontrarse relacionado con las preguntas diseñadas del instrumento, las cuales no permitieron explorar a profundidad este conocimiento. También puede guardar relación con la poca experiencia que los profesores pueden tener respecto al proceso de generalización, ya que a pesar de identificar de forma sencilla el patrón o regularidad, extender el razonamiento a lo indeterminado es un aspecto en el que presentan dificultades, lo que puede derivar en no lograr reconocer que este proceso es importante dentro del desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

En lo que corresponde a la categoría de ***prácticas ligadas a una temática en específico*** se encontró el indicador a priori diseñado, aunque únicamente en las evidencias del profesor Fernando. Al respecto Mason (1999) menciona que el proceso de generalización no termina con la expresión general de la regularidad, sino que es necesario poder comprobar la conjetura, es decir la expresión de generalización, sin embargo, es un momento que se obvia y recurrentemente no se realiza. De aquí puede derivar que, dicho indicador solo haya sido posible encontrarlo en un profesor y en una sola de sus respuestas. Sin embargo, es importante recuperar el fortalecimiento de este conocimiento ya que es parte fundamental dentro del proceso de generalización, en particular, y como parte del desarrollo de la actividad matemática en general.

5.4.2. Discusión sobre los indicadores del dominio PCK.

De los indicadores de conocimientos encontrado dentro del dominio PCK se encontraron pocos indicadores de cada uno de los subdominios, siendo el dominio del KMT donde se encontraron un mayor número de evidencia. Esto puede derivarse de la misma naturaleza del conocimiento, el cual puede ser mayormente identificando dentro de la práctica del profesor, y al tener como instrumento principal el cuestionario con las actividades de *Early Algebra*, se hace un poco más complejo rescatar este tipo de conocimientos, aun cuando se consideraron preguntas para identificarlos.

Dentro del subdominio **KFLM** se encontraron dos indicadores de conocimiento correspondiente a la categoría de ***teorías de aprendizaje de las matemáticas***. El KFLM 1 fue rediseñado, pues las respuestas de los profesores permitieron puntualizar sobre el tipo de patrones que se pueden aprovechar para desarrollar el aprendizaje proceso de generalización. Mientras que el KFLM 2 fue identificado de la forma que se esperaba.

En lo que corresponde a la categoría de ***fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas*** se encontró un nuevo indicador, en el que se evidencia el conocimiento que tienen los profesores sobre los posibles errores que pueden cometer los estudiantes en el proceso de generalización, en este caso no tomar conciencia de la propiedad común. Este conocimiento da cuenta de la conciencia que ellos mismos toman sobre el papel que juega identificar el patrón en una secuencia o relación funcional.

Finalmente, en la categoría ***formas en que los alumnos interactúan con el contenido*** los profesores evidenciaron un nuevo indicador KFLM 4, que expresa que una de las formas de desarrollar el proceso de generalización está ligada a observar la relación entre los datos variantes e invariantes en una situación.

De esto se puede reflexionar por un lado la importancia de poder interactuar con el ejercicio de la práctica docente dentro del aula, a fin de tener más elementos que puedan apoyar en la identificación de este tipo de conocimiento. También, se puede rescatar que dado que los profesores no poseen experiencia sobre el aprendizaje de *Early Algebra* y la generalización (dado que no es un contenido curricular que se aborde en el grado que imparten) puede ser más complejo dar evidencia de un conocimiento KFLM.

Sin embargo, se logra identificar que la experiencia que los profesores tuvieron al resolver actividades de generalización y desarrollar este proceso, fue retomada para relacionarla con la forma en que los estudiantes la desarrollarían pues sus respuestas se ven ligadas a las dificultades que ellos enfrentaron y los errores que en algunos momentos cometieron.

Por su parte, en el **subdominio KMT** se encontró un mayor número de indicadores en la categoría, formas de enseñanza y un indicador en lo que corresponde a recursos y materiales; mientras que en la categoría ejemplos y ayudas no fue posible identificar el indicador a priori.

Los indicadores dentro de la categoría ***formas de enseñanza*** evidenciaron el conocimiento que los profesores tienen sobre la potencialidad de las actividades lúdicas, concretas y de inferencias dentro del desarrollo del pensamiento matemático en general y del algebraico en particular.

Se puede interpretar de estos indicadores que la experiencia que los profesores tuvieron con la resolución de las actividades apoyó a relacionar el conocimiento que poseen sobre la enseñanza de las matemáticas con el desarrollo del proceso de generalización, identificando el tipo de actividades que favorece este proceso desde la enseñanza. Es posible afirmar esto ya que las preguntas relacionadas con este subdominio se presentaron al finalizar las actividades de generalización, a fin de que los profesores recuperaran lo reflexionado con las misma y lo relacionaran con su práctica docente.

De esta manera, el indicador a priori (KMT 2) de esta categoría se rediseñó y de éste se desprendieron dos; ya que la respuesta de los profesores permitió puntualizar sobre los tipos de actividades que pueden potenciar la enseñanza dentro del *Early Algebra*.

Finalmente, en el **subdominio KMLS** el rediseño del indicador a priori (KMLS 1) evidenció la apropiación que los profesores tienen sobre los temas contenidos en el plan de estudios 2017, ya que para ellos fue más sencillo ubicar el diseño de una actividad propuesta (que favoreciera el desarrollo del pensamiento algebraico) con un tema de los abordados en dicho programa de estudios.

El conocimiento profundo sobre los temas curriculares marcados en el programa de estudios 2017 se puede encontrar relacionado con la experiencia que los profesores que constituyen la muestra tienen sobre los grados de primero y segundo, ya que los tres tienen 5 años o más impartiendo estos grados. De esto, puede inferirse que la experiencia dictando dichos grados brinda conocimiento profundo de los temas que se abordan en matemáticas dentro del programa de estudios anterior al vigente.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones a las que se ha llegado con este trabajo. Para lo cual se retoma la pregunta de investigación y los objetivos planteados. El capítulo se encuentra organizado en cinco apartados como se muestra a continuación.

6.1. Conocimientos puestos en acción del profesor de primero y segundo de primaria al desarrollar el proceso de generalización en el contexto de Early Algebra.

Retomando la pregunta de investigación de este trabajo ¿qué conocimientos ponen en acción los profesores de primero y segundo de primaria al enfrentarse a actividades de *Early Algebra* que involucren el proceso de generalización? Los resultados nos permiten concluir que los profesores accionan conocimientos tanto del MK como del PCK en los diferentes subdominios del modelo MTSK.

En cada una de las actividades lo profesores pusieron acción más de un indicador perteneciente a diferentes subdominios que se conectaron para poder llevar a cabo su proceso de generalización. Es importante señalar que dichas conexiones se fueron creando en cada uno de los momentos del proceso de generalización, y constituyeron bases para permitir el tránsito en cada una de ellas.

Los conocimientos del dominio MK se pusieron en acción para resolver las actividades planteadas desde el conocimiento matemático disciplinar. De esta forma los diferentes subdominios y categorías del MK permitieron a los profesores diseñar una situación que se ajuste a expresiones algebraica sin usar símbolos (*fenomenología, propiedades y sus fundamentos*) (KoT 1-2), así como resolver actividades de generalización de patrones y relaciones funcionales.

Los conocimientos puesto en acción permitieron a los profesores desarrollar cada uno de los momentos del proceso de generalización, tal como tomar conciencia de la propiedad común, a través de los conocimiento de *registros de representación, procedimientos, definiciones, prácticas ligadas a una temática en específico* (KoT 5, KoT 15-16, KPM 1); extender la propiedad común a otros elementos y a lo indeterminado, por medio de los conocimientos de *procedimientos* y *prácticas ligadas a una temática en específico* (KoT 19-24, KPM 3) ; así como usar la propiedad común para establecer una regla accionando conocimiento sobre el *registros de representación* y *procedimientos* (KoT 7-11, KoT 20); y realizar la inversión del proceso a través de conocimientos de *prácticas ligadas a una temática en específico* (KPM 5).

Mientras que los conocimientos del dominio PCK se accionaron al diseñar planteamientos que dieran sentido a una expresión algebraica, pues fue en este momento donde los profesores además del conocimiento sobre el MK necesitaron conocimientos sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, así como el conocimiento curricular a fin de ubicar el planteamiento en un tema acorde al grado de los estudiantes.

En el dominio PCK, los profesores pusieron acción conocimientos del dominio KFLM al dar cuenta de conocer el contenido matemático previo necesario para que los estudiantes desarrollen un proceso de generalización y retomarlo en sus diseños (KFLM 2); así como al conocer los posibles errores que pueden cometer en el proceso de generalización y tomarlo en cuenta para diseñar las consignas y acompañamiento (KFLM 3). Mientras que accionaron conocimiento del KMT al conocer la potencialidad y limitaciones del tipo de actividades, materiales y de lenguaje que pueden emplearse para favorecer el proceso de generalización (KMT 1-7, KMT 9-12). Y finalmente pusieron en acción conocimiento del KMLS al conocer los temas que se abordan curricularmente en el grado escolar que atienden y retomar un contenido acorde al nivel escolar en el que se encuentran los estudiantes (KMLS 1-2).

Los profesores pusieron en acción estos conocimientos para poder enfrentar las actividades planteadas, las cuales demandaron, primero, poner en acción su proceso de generalización y, segundo, favorecer dicho proceso en sus estudiantes a través del diseño de una actividad que diera sentido a una expresión algebraica.

6.2. Aportaciones a la investigación del conocimiento del profesor de primaria en el contexto de *Early Algebra*.

Este trabajo genera aportes a la investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas de nivel primaria en términos de las conexiones de conocimiento que se generan al desarrollar el proceso de generalización.

Consideramos que los resultados de este estudio sobre las conexiones entre los indicadores de conocimiento del dominio MK permiten ahondar en la caracterización del conocimiento disciplinar que los profesores de nivel primaria ponen en acción al desarrollar su proceso de generalización, ya que es posible identificar el tipo de conocimiento que manifiesta en cada uno de los momentos del proceso y cómo es que éstos se conectan.

Lo anterior responde a la necesidad de profundizar en el conocimiento algebraico de los profesores de nivel primaria, reportada en algunas investigaciones (Castro y Godino, 2014; Tanisli y Kose, 2013; Zapatera y Callejo, 2013), las cuales sostienen que los profesores no son capacez de interpretar el conocimiento de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de generalización porque poseen dificultades en su propio conocimiento algebraico. De aquí la importancia por ahondar en el conocimiento del profesor desde el contexto de la generalización. Por lo que los resultados aquí expuestos constituyen una aportación al campo.

En este mismo sentido, las investigaciones sostienen la importancia de promover la creación de oportunidades dirigida a los profesores dónde puedan tener una acercamiento distinto con Álgebra para favorecer su conocimiento y procesos cognitivos (Castro y Godino, 2014; Zapatera y Quevedo, 2021); así como que estos espacios incentiven el estudios de aspectos de generalización de propiedades y relaciones funcionales más que la manipulación símbolica (Aké, 2021), ya que este enfoque puede promover una comprensión más profunda de procedimientos que muchas veces los profesores usan de forma mecanizada (Branco y Ponte, 2012).

Por lo anterior, contar con información respecto a la caracterización del conocimiento algebraico que los profesores ponen en acción al enfrentarse a actividades que involucren el proceso de generalización, puede favorecer la identificación de los elementos que movilizan para con base en ello generar propuestas de formación que permitan fortalecer el conocimiento algebraico en términos de las conexiones que se generan al desarrollar el proceso de generalización.

Conocer las conexiones entre los conocimientos del MK al desarrollar el proceso de generalización, aportan al propio fortalecimiento de este proceso, ya que permiten profundizar sobre el conocimiento que pone en juego los profesores en cada uno de los momentos, la evolución que presentan los tipos de generalización (enunciadas por Radford 2006) y que son evidenciadas a través de los registros de representación, así como los procedimientos y estrategias puestos en acción para dar respuestas a los diferentes tipos de tareas de generalización (enunciadas por Stacey, 1989).

Lo anterior hace posible analizar cómo transitan el proceso de generalización, lo que permite valorar el fortalecimiento de la red de conocimientos para superar dificultades, reportadas en la investigación, tales como formular una descripción algebraica formal del proceso de generalización o lograr la inversión del proceso (Stacey, 1989; Trujillo et al., 2010).

De esta manera los hallazgos sobre las conexiones del MK aportan este respecto, en términos fortalecer el conocimiento en términos del proceso de generalización de los profesores. Constituyendo una fuente de información que favorece que en las ofertas de formación docente sean considerados estos aspectos.

Este trabajo también genera aporte en términos del conocimiento PCK, ya que las actividades de diseño de situaciones o planteamientos que se ajusten a una expresión algebraica, brindaron información sobre el conocimiento que el profesor pone en acción al tomar decisiones sobre el tipo de actividades, materiales, recursos, lenguaje o incluso temas curriculares en los que pueden situar los planteamientos.

Afirmamos lo anterior, derivado de que gran parte de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de primaria, se han centrado en el conocimiento matemático *per se* que poseen éstos (Branco y Ponte, 2012; Hohensee, 2017; Trujillo et al, 2010; Zapatera y Quevedo, 2021). Por lo que, este trabajo contribuye al incremento del estudio del conocimiento PCK en términos del proceso de generalización en el campo de *Early Algebra*.

El PCK recuperado en esta investigación, brinda información respecto a cómo los profesores de primaria vinculan el conocimiento que posen sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, con el MK generado al desarrollar el proceso de generalización, para lograr un conocimiento didáctico que permita favorecer el pensamiento algebraico de los estudiantes a través del diseño de planteamientos donde se dé sentido a expresiones algebraicas en los primeros grados escolares. Ya que los indicadores evidenciados reflejan la materiales, recursos y apoyos que ellos mismos emplearon para llevar a cabo el proceso de generalización y las dificutades que enfrentaron.

Esta información puede apoyar a necesidades como las reportadas por Zapatera y Quevedo (2021) quienes sostienen la importancia de incluir en la formación docentes experiencias profesionales donde se favoreza el diseño de tareas didácticas que busquen promover el pensamiento algebraico. Por lo que contar con una caracterización del PCK de los profesores de primero y segundo en términos del proceso de generalización es una fuente de información que permite que la creación de estos espacios no solo fortalezcan el conocimiento matemático *per se* sino el conocimiento del contenido didáctico.

Si bien, el PCK evidenciado en este trabajo, no es tan profundo con el MK, la información obtenida abre la posibilidad de futuras líneas de investigación, como se expondrá más adelante.

De manera general, este trabajo genera aportes sobre el estudio del conocimiento del profesores de primaria frente a grupo, ya que este fue realizado con profesores con una experiencia mínima de cinco años dictando estos grados, a diferencia de las investigaciones revisadas dentro del estado del arte de esta trabajo (Aké, 2021; Branco y Ponte, 2012; Castro y Godino, 2014; Hohensee, 2017; Pincheira y Alsina, 2022; Tanisli y Kose, 2013; Trujillo et al, 2010; Zapatera y Callejo, 2013; Zapatera y Quevedo, 2021), las cuáles en su mayoría fueron investigaciones realizadas con futuros profesores.

Por lo que este trabajo aporta al conocimiento que se tiene sobre el profesor de primaria con experiencia en los primeros grados escolares de nivel primaria, lo que da información del estado de guarda su conocimiento y las necesidades, en estos términos, que los profesores en servicio tienen para lograr el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en sus aulas. Por lo tanto, este trabajo genera aportes en la profundización del conocimiento de profesores de primaria en activo, lo que favorece la obtención de información que pueda recuperarse para la creación de espacio de formación y fortalecimiento del conocimiento de docente en función.

6. 3. Aportaciones al modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El conocimiento del profesor de matemáticas de nivel primaria, en términos del conocimiento algebraico, es un campo dentro de la investigación en Matemática Educativa con algunas décadas de exploración, bajo diferentes modelos del conocimiento del profesor (Godino et al., 2014; Picheira y Alsina, 2022; Tarisfeños y Bravo, 2022). En lo que respecta al modelo del MTSK, esta investigación contribuye a la caracterización de conocimiento del profesor de primaria en términos de este modelo.

Consideramos que la caracterización del conocimiento que ponen en acción los profesores de primero y segundo de primaria al enfrentarse a actividades de generalización dentro de *Early Algebra*, desde el modelo MTSK abona no solo a las investigaciones en *Early Algebra*, sino al propio modelo, ya que surgen indicadores de conocimiento en cada uno de los subdominios del MTSK en términos de *Álgebra Temprana*.

Lo anterior fundamentado en que los trabajos dentro del MTSK exponen la importancia acrecentar los estudios a fin de comprender lo que profesores de matemáticas (en los diferentes niveles) necesitan en términos de sus conocimientos (Sosa y Vasco, 2022). De manera particular en el campo de Álgebra, sugieren ampliar las investigaciones en este campo, dado que es una parte fundamental del currículo de matemáticas y sin embargo existe poca información sobre el conocimiento algebraico del profesor de matemáticas (Watkins, 2018); por lo que resaltan que uno de los campos de interés que puede contribuir a este respecto es el estudio del conocimiento del profesor en el campo de Álgebra Temprana, lo cual puede apoyar a establecer programas de formación y actualización del profesorado (Sosa y Vasco, 2022).

De esta forma, con trabajos como el aquí presentado, es posible incrementar la información respecto al MTSK de profesores de los primeros grados de primaria en estos términos y que subyacen del proceso de generalización, como se ha hecho con trabajos como el de Tarisfeño y Bravo (2022). Lo que apoya a fortalecer este campo de investigación dentro del MTSK.

De manera particular, este estudio aporta al MK desde la caracterización del conocimiento que los profesores ponen en acción al enfrentarse a actividades de generalización en el contexto de *Early Algebra*. Mientras que aporta al PCK al caracterizar el conocimiento en acción de los profesores al diseñar actividades o situaciones que involucren el desarrollo del proceso de generalización.

De esta forma, los resultados aquí expuestos apoyan al incremento de información sobre el MTSK en el campo del Álgebra, no solo impactando en *Early Algebra*, sino abriendo la posibilidad de estudiar cómo éste puede vincularse con el conocimiento del Álgebra en general y establecer punto de comparación con las investigaciones que se han realizado con profesores de niveles superiores.

En suma, este trabajo aporta al modelo MTSK al incrementar la información que se tiene sobre el conocimiento del profesor de primaria, pero de manera particular sobre los conocimientos algebraicos que pone en acción al desarrollar su proceso de generalización.

6. 4. Aportaciones a la formación de profesores de matemáticas de nivel primaria.

La investigación aquí presentada aporta a la formación de profesores de matemáticas, ya que la identificación y caracterización de los conocimientos que los profesores ponen en acción al enfrentarse a actividades de generalización puede favorecer la creación de espacios de formación en los cuales se fortalezca el conocimiento algebraico.

La relación con la exploración del Álgebra temprana no es un aspecto trivial para los profesores (Hohensee, 2017), por lo que es preciso contar con espacio que apoyen en la formación de los futuros profesores donde se les acerque a ejemplos de razonamiento algebraico temprano y donde tengan experiencias con el proceso de generalización (Hohensee, 2017; Zapatera y Quevedo, 2021).

Sin embargo, el diseño de estos espacios requiere de fundamentos respecto al estado que guarda el conocimiento de los profesores, ya que esto puede permitir que los espacios fortalezcan los aspectos donde se requiere atención. Por lo que se considera que los resultados aquí expuestos constituyen un aporte para ello.

De forma particular, los resultados de este trabajo aportan a que la creación de dichos espacios de formación se centre en fortalecer el proceso de generalización, puesto que los hallazgos de este trabajo caracterizan el conocimiento del profesor en estos términos. Aportando de esta manera a la necesidad registrada en algunas investigaciones (Cañadas y Castro, 2007; Pinto y Cañadas, 2018; Zapatera y Callejo, 2013) respecto la toma de consciencia de conciencia explícita del proceso de generalización y los elementos matemáticos y acciones que intervienen, tales como explorar, revisar o validar conjeturas; ya que esto puede permitir identificar y acompañar el desarrollo del proceso de pensamiento algebraico de los estudiantes en edades tempranas (Tanisli y Kose, 2013).

En términos del PCK, los resultados contribuyen a que la creación de estos espacios de formación apoye no solo el conocimiento matemático *per se*, sino también el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, en este caso del proceso de generalización.

En este estudio identificamos que el PCK que los profesores ponen en acción se encuentra normado por el conocimiento que tienen de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, y que este fue aterrizado al proceso de generalización retomando su propia experiencia al desarrollarlo. Por lo que los indicadores que emergieron son una fuente de información que permite evaluar el estado en el que se encuentra el PCK de los profesores de primero y segundo de primaria a fin de fortalecerlo.

Es importante tener en cuenta este reconocimiento, ya que promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano requiere del fortalecimiento en conjunto del conocimiento del profesor, en términos del MK y del PCK. Los estudios en este campo dejan en evidencia las limitaciones que presentan los profesores en formación al enfrentarse a situaciones de enseñanza en términos del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico (Pincheira y Alsina, 2022); así como para clasificar problemas que fortalezcan el pensamiento algebraico (Stephens, 2008) e interpretar el propio pensamiento de los estudiantes en estos términos (Tanislini y Kose, 2013). Por lo que exponer a los profesores a procesos de formación donde se fortalezcan el MK y PCK, puede ayudar a superar estos problemas.

De esta manera, la caracterización que se brinda en este estudio respecto al MK y el PCK, constituyen una fuente de información de utilidad para el diseño de estos espacios de formación del profesorado.

6.5. Aportaciones a la formación de formadores de profesores de matemáticas de nivel primaria.

Es importante que los formadores de profesores tengan información sobre los conocimientos que los docentes de nivel primaria necesitan para desarrollar pensamiento algebraico temprano; pero también del estado que guarda el conocimiento del profesor de primaria en términos algebraicos.

Es por ello por lo que, como se ha expuesto, los resultados de esta investigación aportan a la formación del profesorado de primaria en términos del conocimiento para desarrollar *Early Algebra*. Sin embargo, esta información es útil en la medida que es procesada por los formadores por lo que se resalta la importancia de ser usada para identificar el conocimiento que los profesores presentan y contrastarlo con el conocimiento que se necesita a fin de favorecer el pensamiento algebraico temprano. Así que este trabajo aporta a los formadores en términos de la información que se brinda respecto al estado del conocimiento del profesor de primaria en servicio respecto al proceso de generalización.

Otro de los aportes que genera esta investigación lo constituye la estructura de las actividades aplicadas, ya que las consignas se encontraron organizadas de una forma que permitieron identificar los momentos del proceso de generalización por lo que pasaron los profesores, así como permitió que éstos vivieran ese proceso con consignas que los llevaron a identificar el patrón, aplicarlo a casos cercano o lejanos, así como extenderlo a casos indeterminados.

Afirmamos que esta es una aportación, ya que la experiencia que los profesores tuvieron al enfrentarse a las actividades generó impacto en los indicadores que emergieron del PCK, como se narró anteriormente. De aquí que esta estructura pueda retomarse en el diseño de espacios donde los profesores tengan acercamientos distintos con el Álgebra de forma general (Hohensee, 2017) y con actividades que involucren el proceso de generalización, de manera particular, que con el acompañamiento adecuado sean capaces de hacer consciente (Trujillo, et al 2010) y generen un impacto en su conocimiento (MK y PCK) y su práctica docente.

Todo lo anterior, permite a los formadores enriquecer su propia formación en términos del conocimiento que los profesores de primaria tienen y necesitan, así como crear espacios que apoyen al fortalecimiento de la preparación de estos. Es imperante, que los formadores identifiquen los conocimientos que deberían tener los profesores de este nivel para desarrollar pensamiento algebraico temprano, pero igual de importante es reconocer el estado en el cual se encuentran en términos de sus conocimientos.

Creemos que los hallazgos de esta investigación, respecto al conocimiento que el profesor pone en acción al desarrollar su proceso de generalización, es un aporte en términos de que los formadores sean capaces de reconocer el estado de su propio conocimiento algebraico y valoren si este es suficiente para apoyar a los profesores a fortalecer los conocimientos que necesitan para a portar al *Early Algebra*.

6.6. Limitaciones y futuras investigaciones

Este tipo de trabajos contribuyen al incremento de la información sobre el conocimiento algebraico del profesor de primaria. Sin embargo, al tratarse de un estudio de caso no es posible llegar a generalizar los hallazgos, por lo que es recomendable continuar la investigación sobre el conocimiento del profesor de primaria en términos del proceso de generalización.

Sobre las limitaciones de este trabajo se encuentra el tiempo destinado al trabajo con los profesores, ya que dada las actividades de los mismo solo fue posible trabajar con ellos en dos sesiones de una duración de tres horas aproximadamente. De contar con más tiempo de interacción con los profesores, consideramos que hubiera sido posible contar con argumentos más extensos que nos llevaran a una profundización mayor de sus conocimientos.

Otra de las limitaciones, en este mismo sentido, se encontró relacionada con el poco tiempo que se tuvo para el diseño de la actividad que diera sentido a una expresión algebraica. Consideramos que esto limitó el hecho de poder indagar a mayor profundidad sobre los conocimientos del PCK puestos en acción.

Una limitante más de este trabajo se asocia a la cantidad profesores con los que se aplicó el instrumento, que sí bien podría considerarse una ventaja, consideramos que de ser menos docentes al momento de la aplicación se habrían podido rescatar datos profundo respecto a lo que sucedió al momento de realizar las actividades, sin embargo al ser una cantidad grande fue necesario atender las dudas que se generaban por lo que se perdió la oportunidad de observar a detalle lo que sucedía en cada caso.

En cuanto a las futuras investigaciones, consideramos que el estudio sobre el conocimiento del profesor de primaria en relación con su proceso de generalización puede seguir siendo explorado desde diferentes vertientes. En este trabajo encontramos que una línea de interés por explorar se encuentra relacionada con analizar el impacto que puede tener en el conocimiento PCK la experiencia que los profesores de primaria generan al desarrollar conscientemente su propio proceso de generalización, equiparando su propio proceso con el que pueden enfrentar sus estudiantes, de tal forma que los lleve a analizar desde el conocimiento PCK cómo potenciarlo.

En relación con lo anterior, una línea más de investigación se encuentra relacionada con estudiar el impacto que puede tener la experiencia de los profesores de primaria al explorar el proceso de generalización con la identificación de temas potenciales (en los grados que imparten) para favorecer el desarrollo de este proceso en sus estudiantes, es decir de qué forma reconocer los momentos y acciones del proceso generalización le ayudan encontrar oportunidades curriculares que se puedan aprovechar para alcanzar los objetivo de *Early Algebra*.

Futuras investigaciones también pueden indagar sobre el conocimiento PCK que pueda favorecer el proceso de generalización, para ello sería interesante poder estudiar el conocimiento que los profesores de este nivel educativo ponen en acción en el ejercicio de su labor docente, observando la clase de matemáticas en los profesores de primero y segundo de primaria, e identificando los conocimientos que pueden ayudar en el desarrollo de *Early Algebra*.

Finalmente, otra de las líneas de futuras investigaciones está relacionada con la comparativa del conocimiento de los futuros profesores de nivel primaria y los profesores en activo con experiencia en los primeros grados de primaria, ya que este estudio nos brindó información respecto al dominio de los temas que los profesores tienen en el nivel que imparten.

6.7. Mi reflexión como profesora de matemáticas

Antes de comenzar mi preparación en esta Maestría Profesionalizante, considero que mis conocimientos, visión y reflexión dentro de la Matemática Educativa aún no eran tan profundas. Tener la oportunidad de comenzar un trayecto de formación profesional me abrió un panorama más amplio de lo que implica ser una profesora profesional, así como una investigadora que comienza su formación en este campo.

El trabajo de investigación realizado en esta Maestría en Matemática Educativa contribuyó de manera significativa a mi desarrollo profesional, a mi conocimiento en la línea del *Early Algebra*. Elegir un tópico, movida por mi interés por profundizar en este campo, con la convicción de la aportación que el *Early Algebra* da a los estudiantes en sus primeros años escolares, me permitió llevar a cabo este trabajo con el gusto de aprender, de crecer y de contribuir a esta línea de investigación en la que encuentro un aporte significativo al desarrollo del pensamiento algebraico.

Comencé este trabajo con mucho interés, con curiosidad y con muchas ganas de aprender en el camino. Desde el diseño del estado del arte de este trabajo, reflexioné sobre la importancia del conocimiento algebraico del profesor de primaria para desarrollar *Early Algebra*, los hallazgos de las investigaciones reportaban esa necesidad y como profesora de matemáticas me preguntaba ¿qué podemos hacer para fortalecer el conocimiento el profesor? ¿cómo hacer posible una propuesta curricular que contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico temprano? En suma, me hice consciente que, para poder dar respuesta a esas preguntas, era muy importante profundizar en lo que los profesores conocen, el conocimiento que tienen y que ponen en acción, de aquí el interés por realizar este trabajo.

La experiencia realizando este trabajo contribuyó a mi formación como investigadora, ya que, desde el trabajo cercano con mi asesora de tesis, así como la contribución de mis profesoras en las asignaturas correspondientes de la maestría, fue posible aprender acerca del rigor que requiere una investigación.

En el diseño de cada uno de los capítulos aprendí cómo construirlo y la importancia de la articulación entre ellos. En el estado del arte, analicé lo que se sabía y se había explorado sobre el tema elegido, esta investigación apoyó al diseño de la problemática, pregunta de investigación y objetivos de este trabajo. De los mismos se derivó el marco teórico que rigió a la propuesta, y la profundización sobre los elementos teóricos centrales desprendieron el diseño de un instrumento con el que se pudiera recoger información que apoyara a alcanzar los objetivos y responder la pregunta de investigación.

Sobre el diseño de la metodología, aprendí el camino que debe trazar un investigador, y que este se encuentra en función directa con lo que se quiere alcanzar. La construcción de este capítulo me brindo herramientas para el diseño de una investigación, y fui consciente de la importancia de tener claridad sobre el tipo de investigación, métodos e instrumentos a utilizar. De esta manera, lo diseñado en la metodología me ayudó a llevar a cabo una recogida de información y un análisis de esta de manera pertinente. Esto me permitió darme cuenta de que, tener ese camino trazado favorece la obtención pertinente de datos y su análisis.

Esta experiencia me permitió darme cuenta de todo el trabajo que hay detrás de una investigación y todo lo que conlleva contestar una pregunta de investigación. Esto me da más herramientas como profesora de matemáticas en aras de emplear lo aprendido y aplicarlo dentro de mi práctica como una profesora investigadora.

REFERENCIAS

Aguilar, Á., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Escudero, D., ... y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM*. 5063-5069.

Aké, L. P. (2021). El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (49), 15-34. https://doi.org/10.17227/ ted.num49-9871

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(3), 211-241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Behar, D. S. (2008). *Metodología de la investigación*. Ediciones Shalom.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice.* Heinemann Educational Books.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, *36*(5), 412-446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional reltionships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings*. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F., & Confrey, J. (2007). Early algebra. In V. J. Katz (Ed.), Algebra: gateway to a technological future (pp. 7–14). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Branco, N., y Ponte, J. P. D. (2012). Developing algebraic and didactical knowledge in pre-service primary teacher education. In *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 75-82. Taipei, Taiwan: PME. http://hdl.handle.net/10451/7072

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Recherches en didactique des mathematiques, *7*(2), 33-115

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación matemática*, *16*(1), 113-148. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516105

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*, 209-218.

Cañadas, M. C., y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2*(3), 137-151. https://doi.org/10.30827/pna.v2i3.6197

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro W. F. y Godino J. D. (2014) Preservice elementary teacher's thinking about algebraic reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 9*(2), 147-162. https://doi.org/10.29333/iejme/287

Castro, W., Godino, J. y Rivas, M (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: un desafío para la formación de maestros. *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, *12,* 92-99.

Delgado, A. F. (2021). Las definiciones de Paradigma, Metodología, Método, Técnica e Instrumento, desde los textos de formación académica/metodológica. *Especialización en Métodos y Técnicas de Investigación en las Ciencias Sociales,* https://repositorio.uniclaretiana.edu.co/handle/123456789/1678.

Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library, 11*, 25-41. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2

Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10.* Heinemann.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). New York, NY: Springer New York.

Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221–262. https://doi.org/10.1080/10508400701193705

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de* *secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio institucional de la Universidad de Huelva http://hdl.handle.net/10272/11456

Ferreira, M. C., Ponte, J. P. D., y Ribeiro, A. J. (2022). Towards an approach to teachers' professional development: how to work with algebraic thinking in the early years. *PNA-Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 16*(2), 167-190. http://hdl.handle.net/10451/59152

Flores, E., Ávila, D. I. E., Navarro, M. Á. M., González, Á. A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Universidad de Huelva.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Guerrero, L., y Rivera A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. In *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 262-272.

Hernández, R. Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación. 6a Edición.* México: McGRAW-HILL e Interamericana Editores S.A. https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*, 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Kaput, J. J (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: LEA

Kaput, J. J (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2001). *Student Achievement in Algebraic Thinking: A Comparison of 3rd Graders' Performance on a State 4th Grade Assessment*. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. En G. Vernand, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 2,163-171. Paris: Laboratoire PSYDEE.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, *8*(1), 139-151. https://www.researchgate.net/publication/228526202

Kilpatrick, J. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Commentary on Part I.* (pp. 125-130). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Kothari, C.R. (2004). Research Methodology. Methods & Techniques. Second Revised Edition. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers. https://ccsuniversity.ac.in/bridge-library/pdf/Research-Methodology-CR-Kothari.pdf

Lee, L. (1996) An initiation into algebraic culture through generalization activities 87–106. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 87–106). Dordrecht: Kluwer.

Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Liñan, M. M., Contreras, L. C., y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los temas (KoT). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*, 12-20.

Malara, N. A., y Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 51-77.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1999). Provoking students to use their natural power to express generality: Tunja sequences. *Revista Ema, 4*(3), 232-246.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. *And the rest is just algebra*, 97-117. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Meneses, J., y Rodríguez, D. (2011). El cuestionario y la entrevista. Barcelona, España: Editorial UOC. https://femrecerca.cat/meneses/publication/cuestionario-entrevista/

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En M.H, Martinho.; R.A.T., Ferreira; J.P. da Ponte, (Eds.), *EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matemática* (pp. 27-51). Póvoa do Varzim: EIEM 2011.

Molina, M. y Cañadas, M. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J.L. Lupiáñez, I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Granada: Atrio.

Moreira, K., y Nacarato, A. M. (2021). El desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes al inicio de la escolarización. *Realidad y Reflexión, 53*(53), 155-181. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10894

Narváez, R., y Santiago, M. C. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática*, *17*(3), 239-264. 10.30827/pna.v17i3.24153

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: Autor.

Ocegueda, C. (2007). Metodología de la Investigación, Métodos, técnicas y estructuración de trabajos académicos. *Edición de la autora,* 51-111.

Papic, M., y Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. *In The Proceedings of the 28th Mathematical Education Research Group of Australasia Conference* (pp. 609-616). MERGA Melbourne, Australia.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. *Revista de Investigación en Educación*, *20*(2), 154-171. https://doi.org/10.35869/reined.v20i2.4222

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal, 33*, 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Radford L. (2015) Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. En S. Cho (ed.), The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978- 3-319-12688-3_15

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter* (pp. 2-21).

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM. Mathematics Education, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Ribeiro, M. (2008). From modeling the teaching practice to the establishment of relations between the teacher's actions and cognitions. En M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008*. (pp. 102- 107). British Society for Research into Learning Mathematics.

Riesenberg, L. A. y Justice, E. M. (2014). Revisión sistemática de la bibliografía (parte 1). *Nursing (Ed. Española), 31*(6), 61-64. DOI: 10.1016/j.nursi.2014.12.019

Rojas, P. J. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista científica, 17*(2), 137.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J. y Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 413-448). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sosa Guerrero, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo Yáñez, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación matemática*, *28*(2), 151-174.

Sosa Guerrero, L., y Vasco Mora, D. (2022). Conocimiento especializado del profesor que enseña álgebra. En Carrillo, Montes y Climent (Eds), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*, (pp. 123-134). Dykinson.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20* (2), 147-164. doi: 10.1007/BF00579460.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Den-zin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443–466). Sage Publications Ltd.

Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(1), 33-47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.12.002

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics, 22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Tanisli, D., y Kose, N. Y. (2013). Pre-service mathematic teachers' knowledge of students about the algebraic concepts. *Australian Journal of Teacher Education, 38*(2), 1–18. doi:10.14221/ajte.2013v38n2.1.

Tarisfeño-Vásquez, S. y Reyes-Bravo, M. (2022). Aproximación al conocimiento especializado de futuros profesores sobre generalización de patrones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 636). SEIEM.

Trujillo, P. A., Castro, E., y Molina, M. (2010). Generalización desde tareas aritméticas desempeño de una pareja de profesores de educación primaria en formación. *Comunicación presentada en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa (7 al 9 de Octubre de 2010)*. Bogotá, Colombia.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.

Vergel y Romano (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista científica, 17*(2), 137.

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa,* 69-81.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9* (3), 193-215. http://hdl.handle.net/10481/34991

Watkins, J.D. (2018). Exploring the knowledge of Algebra for teaching. [Tesis doctoral, University of Louisville's]. Institutional Repository. https://doi.org/10.18297/etd/3084

Zakaryan, D., y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación matemática*, *33*(1), 71-97. https://doi.org/10.24844/em3301.03

Zapatera L. A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números: revista de didáctica de las matemáticas, 97,* 51-67.

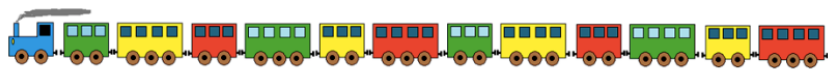
Zapatera, A., y Callejo, M., (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. *Investigación en Educación Matemática XVII,* 535-544.

Zapatera, A., y Quevedo, E. (2021). The initial algebraic knowledge of preservice teachers. *Mathematics*, *9*(17), 2117. https://doi.org/10.3390/math9172117

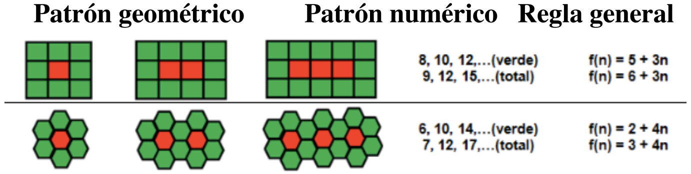
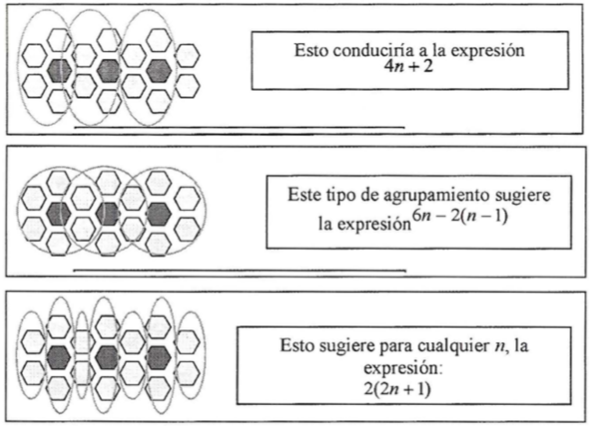
Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2*(1), 93–120. https://doi.org/10.1080/14926150209556501

ANEXOS

Anexo 1. Tabla de identificación de actividades bajo el modelo MTSK-generalización.

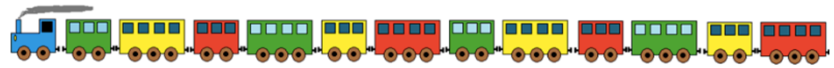
Dominio	Sub dominio	Categoría	Indicador MTSK-generalización	Actividad
MK	KoT	Fenomenología	Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación.	Observa la siguiente expresión algebraica $3(n+2)$ Imagina que estás trabajando con alumnos de 3.° o 4.° grado que probablemente no estén preparados para los símbolos algebraicos. ¿Cómo les mostrarías la relación contenida en esta expresión sin usar símbolos algebraicos? ¿Puedes inventar una situación del mundo real que se ajuste a esta relación? *Hohensee (2017)*
			Conocer el uso de la generalización para construir secuencias con patrones geométricos y/o numéricos.	Continua con las siguiente secuencia.  *Zapatera (2018)*
				Completa las siguientes secuencia. 1 x 6 + 6 = 3 x 4 2 x 7 + 6 = 4 x 5 3 x 8 + 6 = 5 x 6 4 x 9 + 6 = 6 x 7 12 x 17 + 6 = 14 x 15 37 x 42 + 6 = 39 x 40 ○ x *Mason (1999)*

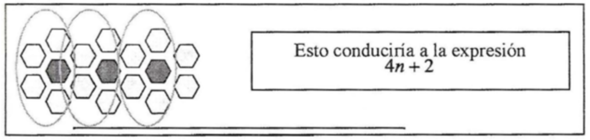
			Conocer el uso de la generalización para resolver relaciones funcionales.	“En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños” 7. Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué crees que hizo con los globos? 8. Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué crees que hizo con los globos? 9. Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita? 10. Cuando hay 15 invitados, ¿cuántos globos necesita? *Ayala-Altamirana y Molina (2021)*
				 1. Dibuja 4 mesas juntas ¿cuántos invitados pueden sentarse en 4 mesas? ¿Y en 5 mesas? 2. ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 20 mesas? Explica como lo has hallado. Zapatera (2018)
		Propiedades y sus fundamentos	Conocer la propiedad distributiva (propiedad de los números reales)	Observa la siguiente expresión algebraica $3(n+2)$ Imagina que estás trabajando con alumnos de 3.° o 4.° grado que probablemente no estén preparados para los símbolos algebraicos. ¿Cómo les mostrarías la relación contenida en esta expresión sin usar

			Conocer que una expresión algebraica se encuentra conformada por variables y constantes.	símbolos algebraicos? ¿Puedes inventar una situación del mundo real que se ajuste a esta relación? *Hohensee (2017)*
			Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad.	 *Zapatera (2018)*
			Conocer que una propiedad de la generalización de patrones geométricos es que el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes.	 *Villa (2006)*

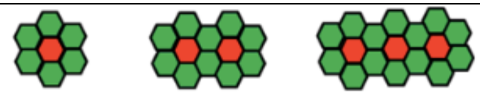
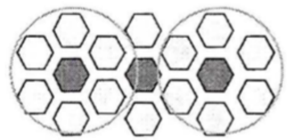
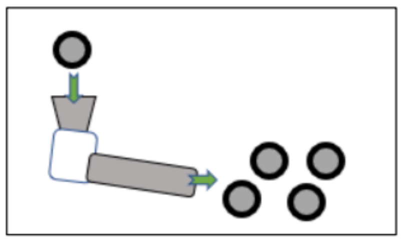
		Registros de representación	Conocer que un registro para expresar el proceso generalización es el verbal.	“En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños” 1. Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué crees que hizo con los globos? 2. Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué crees que hizo con los globos? 3. Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita? 4. **¿Cómo obtuve la respuesta?** 5. ***Describan* la relación que existe entre el número de globos y el número de invitados.** 6. **¿Cómo le explicaría a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños?** *Ayala-Altamirana y Molina (2021)*
			Conocer que un registro para para expresar el proceso de generalización es el pictórico.	“En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños” 10. Cuando hay “muchos” / “infinitos” invitados, ¿cuántos globos necesita?

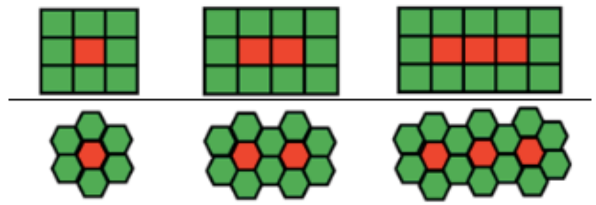
			Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización es el simbólico.	11. Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita? 12. Si estoy pensando en una cantidad de invitados ¿es posible generar una expresión que me ayude a saber la cantidad de globos que necesito? ¿cómo lo harías? 13. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de globos dada una cantidad de invitados. *Ayala-Altamirana y Molina (2021)*
		Definiciones	Conocer que el pensamiento algebraico se define como un proceso en el que los alumnos generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de ejemplos particulares, establecen esta generalización a través de la argumentación, y la expresan gradualmente de una forma simbólica apropiada para su edad.	Para usted ¿qué es el pensamiento algebraico?
			Conocer que la generalización se define como el proceso que lleva el razonamiento a un nivel en el que la atención ya no se centra en los casos en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones existentes entre ellos para aplicarlo a todos los casos.	¿Qué entiende por generalización?

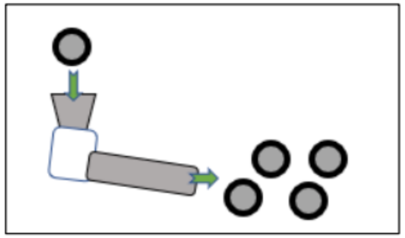
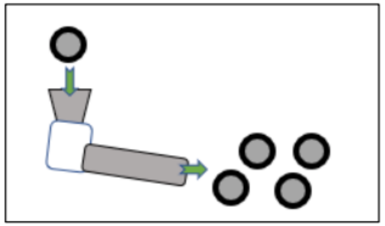
			Saber lo que es una secuencia (definición)	Observa la siguiente secuencia.  Si considera el color. 1.5. Rodee con un círculo el núcleo del patrón. 1.6. Describa el núcleo. 3. Haga lo mismo, pero con el tamaño. 3.1. Rodee con un círculo el patrón. 3.2. Describa el núcleo.
			Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización.	Si considera los dos atributos a la vez. 3.5.¿Cuál es el núcleo del patrón? 3.6.¿Cuántos elementos tiene? 3.7.Alargue el tren dibujando más vagones considerando este nuevo núcleo de patrón. 3.8.Compare cómo son las secuencias construidas en cada consigna ¿son iguales? ¿a qué se debe? *Zapatera (2018)*
			Conocer que una relación funcional se define como la correspondencia entre dos o más cantidades que covarían.	Para usted ¿qué es una relación funcional?
		Procedimientos	Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva.	

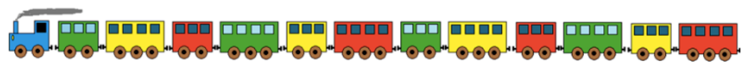
			Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b\ (b =/0)$.	1. Cuando hay 5 hexágonos rojos ¿cuántos hexágonos hay en la secuencia? 2. Sin construir la secuencia responda ¿cuántos hexágonos verdes hay en la secuencia cuando hay 10 hexágonos rojos? *Zapatera (2018)*
			Conocer que un procedimiento para identificar un patrón geométrico en una secuencia es a través de la variable de agrupamiento.	 *Villa (2006)*

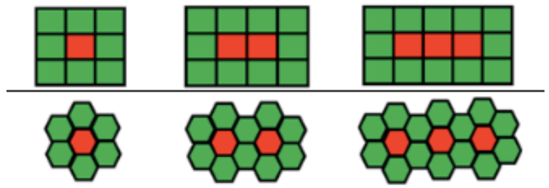
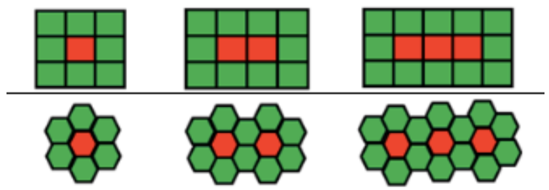
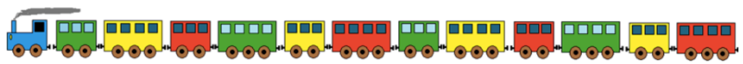
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó y a casos indeterminados.</td>
<td>“En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños”.
<table>
<tr><th>Momento</th><th>Dato desconocido</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td>1. Identificar elementos comunes en casos particulares.</td><td>Relación entre las variables</td><td>Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?
Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?</td></tr>
<tr><td>2. Extender el razonamiento más allá del rango que los originó (otros casos particulares)</td><td>Valor de la variable dependiente</td><td>Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?
Cuando hay 15 invitados, ¿cuántos globos necesita?
Un niño de la clase dice que hay 8 invitados, por lo que necesitaran 22 globos. ¿Estás de acuerdo con él?</td></tr>
<tr><td>3. Extender el razonamiento a casos indeterminados</td><td>Variable dependiente</td><td>¿Cómo le explicarías a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños?
Cuando hay “muchos” / “infinitos” invitados, ¿cuántos globos necesita?
Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita?
¿Es correcta la afirmación “cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos” ?, ¿por qué?
¿Es correcta la afirmación “cuando hay Z invitados, se necesitan W globos” ?, ¿por qué?</td></tr>
</table>
Ayala-Altamirano y Molina (2021)</td>
</tr>
</table>

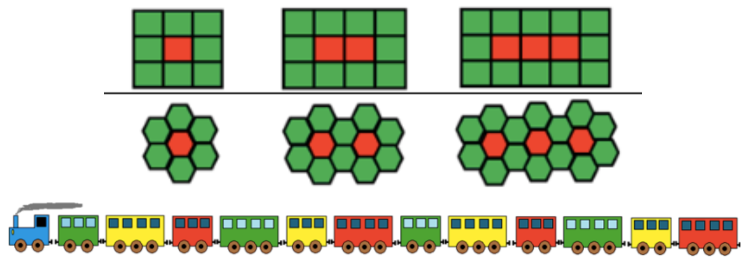
			Conocer que un procedimiento para hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos es a través de la inversión del proceso de generalización.	 8. Siguiendo el patrón identificado ¿se puede construir la secuencia con 25 hexágonos amarillos? ¿A qué se debe?
	KSM	Conexiones de simplificación	Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer o segundo grado de primaria a través del conteo y la agrupación.	Usar la agrupación y el conteo para encontrar el patrón de crecimiento de la siguiente sucesión.  *Villa (2006)*
			Conocer que la generalización se conecta con el conteo y la agrupación mediante el reconocimiento de patrones.	
			Conocer que una relación funcional se conecta con un tema de primero o segundo de primaria a través de problemas aditivos y multiplicativos.	 1. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas? 2. ¿Cuántas colas saldrán de la máquina si metemos 10 bolas? 3. ¿Cuántas colas saldrán de la máquina si metemos 7 bolas? 4. Pon el número de bolas que tú quieras al principio de la máquina ¿cuántas bolas salen? Narvaez (2023)

		Conexiones de complejización	Conocer que las secuencias con patrones geométricos se conectan con el tema de expresiones algebraica a través de las expresiones de generalización.	 Construye una expresión que te permita encontrar cualquier término de la secuencia. *Zapatera (2018)*
	KPM	Prácticas ligadas a una temática en específico	Conocer el rol de la generalización en *Early Algebra*.	Encuentra los valores que completen la secuencia para un número no determinado. 1 x 6 + 6 = 3 x 4 2 x 7 + 6 = 4 x 5 3 x 8 + 6 = 5 x 6 4 x 9 + 6 = 6 x 7 12 x 17 + 6 = 14 x 15 37 x 42 + 6 = 39 x 40 ○ x *Mason (1999)*
			Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.	
			Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones.	Observa la siguiente secuencia.  1. ¿Es posible continuar con las secuencias? ¿Por qué? *Zapatera (2018)*

			Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización.	 6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe como funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina? 7. Si estoy pensando en una cantidad de bolas para meter a la máquina ¿es posible generar una expresión que me ayude a saber la cantidad de bolas que obtendré? ¿cómo lo harías? 8. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de bolas que saldrán de la máquina si meto una determinada cantidad. *Narvaez (2023)*
		Prácticas ligadas a la matemática en general	Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.	 1. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de bolas que saldrán de la máquina si meto una determinada cantidad. 2. ¿Cómo puede saber qué la expresión construida es correcta? *Narvaez (2023)*

PCK	**KFLM**	Teorías de aprendizaje de las matemáticas	Conocer que una forma de aprendizaje del proceso de generalización es a través de la identificación de patrones.	Reproducir un sonido en un instrumento musical y pedir que continuen siguiendo el patrón para generalizarlo.  Zapatera (2018)
			Conocer los contenidos matemáticos previos que puede retomar para diseñar una situación y fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico.	Observa la siguiente expresión algebraica $3(n+2)$ Imagina que estás trabajando con alumnos de 3.° o 4.° grado que probablemente no estén preparados para los símbolos algebraicos. ¿Cómo les mostrarías la relación contenida en esta expresión sin usar símbolos algebraicos? ¿Puedes inventar una situación del mundo real que se ajuste a esta relación? *Hohensee (2017)*
		Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje	Conocer que un error que los estudiantes pueden cometer al generalizar es expresar incorrectamente el patrón identificado	¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer los estudiantes al generalizar las siguientes secuencias con patrones?   *Zapatera (2018)*

		Formas en que los alumnos interactúan con el contenido	Conocer que una manera en la que los estudiantes hacen evidente la identificación de un patrón es a través de expresiones como "lo que se repite”.	¿Cómo es posible evaluar el proceso de generalización que llevan a cabo los estudiantes? ¿qué expresiones o manifestaciones me permitirán identificar que están generalizando?
			Conocer que una manera en la que los estudiantes resuelven situaciones de generalización de patrones lineales es a través de la estrategia aditiva.	¿Qué estrategias pueden usar los estudiantes para resolver la siguientes secuencias?  *Zapatera (2018)*
	KMT	Formas de enseñanza	Conocer la potencialidad que tienen para la enseñanza de la generalización de patrones el uso de la variable de agrupamiento.	¿Cómo podemos ayudar a los estudiantes a detectar el patrón en las siguientes secuencias?   *Zapatera (2018)*

			Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso actividades con patrones.	¿Cómo pueden desarrollar el proceso de generalización mis estudiantes a través de la actividad de secuencia de patrones?  *Zapatera (2018)*
		Ejemplos y ayudas	Conoce que una forma de ayuda para que los estudiantes encuentren la expresión de generalización es identificar los datos variantes e invariantes en la relación.	¿Qué ayudas serán necesarias que realice con mis estudiantes para comprender la relación en la siguiente situación? 

		Recursos y materiales	Conoce la potencialidad del uso de materiales concretos para favorecer el proceso de generalización.	Observa la siguiente expresión algebraica $$3(n+2)$$ Imagina que estás trabajando con alumnos de 3.° o 4.° grado que probablemente no estén preparados para los símbolos algebraicos. ¿Cómo les mostrarías la relación contenida en esta expresión sin usar símbolos algebraicos? ¿Puedes inventar una situación del mundo real que se ajuste a esta relación? *Hohensee (2017)* *Evaluar la inclusión de materiales y recursos de apoyo en el diseño de la actividad*.
	KMLS	Resultados de aprendizaje esperado	Conoce los **Procesos de Desarrollo de Aprendizaje** (PDA) del programa 2022 para primer grado y segundo grado que pueden favorecer el desarrollo del proceso de generalización.	Observa la siguiente expresión algebraica $$3(n+2)$$ Imagina que estás trabajando con alumnos de 3.° o 4.° grado que probablemente no estén preparados para los símbolos algebraicos. ¿Cómo les mostrarías la relación contenida en esta expresión sin usar símbolos algebraicos? ¿Puedes inventar una situación del mundo real que se ajuste a esta relación? *Hohensee (2017)* *Ubicar curricularmente el diseño tomando en cuenta el nivel de desarrollo conceptual y procedimental y la secuencia de temas*.
		Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimiental	Conocer que en la fase 3 de la Nueva Escuela Mexicana, se debe ofrecer un primer acercamiento a la modelación, la secuenciación y poder resolver situaciones análogas y nuevas.	
		Secuencia de temas	Conocer que los PDA de primer grado y segundo grado tiene secuencia con los PDA de 3ero "identificar y representar **regularidades** presentes en la **naturaleza**".	

Anexo 2. Intrumento de recogida de datos. Generalización en patrones.

INICIO DE LA SESIÓN

Actividad A. Para mí el pensamiento algebraico es…

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *poseen* sobre las **definiciones** de **pensamiento algebraico** y **generalización**, así como los **conocimientos** que *ponen en acción* para **conectar** una **relación algebraica** con los **contenidos** que se desarrollan en el **grado que imparten**.

Para ello se plantearán las preguntas ¿qué es el pensamiento algebraico?, ¿qué habilidades debe promoverse en los estudiantes para contribuir en el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿qué es la generalización?; así como pedir que diseñen una actividad que se ajuste a la siguiente relación $\mathbf{3(n+2)}$**;**sin usar símbolos algebraicos.

Objetivo–didáctico. Recuperar el conocimiento previo que los profesores tienen sobre Álgebra y generalización. Diseñar una actividad que permita conectar una relación algebraica con el contenido que desarrollan en el grado que atienden.

Descripción de la actividad. Se plantean dos momentos de esta actividad. En el primero (momento A.1.) se rescatan las concepciones que los profesores tienen sobre el Álgebra y la generalización desde su formación como profesores de nivel primaria respondiendo a las preguntas ¿qué es el álgebra? Y ¿qué es la generalización? Mientras que en el segundo (momento A.2.) se recuperan los conocimientos que ponen en acción al diseñar una tarea a partir de una relación algebraica. Es importante señalar que el momento A.2. se volverá a plantear al finalizar las dos sesiones de taller, con el objetivo de comparar un antes y un después sus propuestas.

Rol de aplicador. Entregar hojas de trabajo donde los profesores contesten las preguntas de manera escrita y diseñen su actividad. Acompañar el proceso de solución de la actividad para asegurar la comprensión de estas y lograr obtener la información que se necesita para el estudio.

Indicaciones de la actividad.

A.1. Reflexione **individualmente** sobre las siguientes preguntas y responda por escrito.

1. ¿Qué es el pensamiento algebraico?
2. ¿Qué habilidades debe promoverse en los estudiantes para contribuir en el desarrollo del pensamiento algebraico?
3. ¿Qué es la generalización?

A.2. Diseñe **individualmente** una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $\mathbf{3(n+2)}$**;** sin usar símbolos algebraicos[7].

[7] Actividad retomada de Hohensee (2017).

Indicadores a priori MTSK para actividad A.

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **-Definiciones:** **KoT 12.** Conocer que la generalización se define como el proceso que lleva el razonamiento a un nivel en el que la atención ya no se centra en los casos en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones existentes entre ellos para aplicarlo a todos los casos. **KoT 11.** Conocer que el pensamiento algebraico se define como un proceso en el que los alumnos generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de ejemplos particulares, establecen esta generalización a través de la argumentación, y la expresan gradualmente de una forma simbólica apropiada para su edad. **-Fenomenología:** **KoT 1.** Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación. **-Propiedades y sus fundamentos** **KoT 4.** Conocer la propiedad distributiva (propiedad de los números reales) **KoT 6.** Conocer que una expresión algebraica se encuentra conformada por variables y constantes. ***KSM** **-Conexiones de simplificación:** **KSM 1.** Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer o segundo grado de primaria a través del conteo y la agrupación.

Actividad B. ¿Tiene sentido?

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **conectar** los **contenidos enseñados** con **contenidos posteriores**.

Para ello se presentará una expresión algebraica a fin de analizarla y darle sentido a partir de contextos, situaciones y contenidos que se abordan en el grado escolar que imparten los profesores.

Objetivo didáctico. Analizar la posibilidad de darle sentido a una expresión algebraica a partir de contextos o situaciones cercanas a los estudiantes.

Descripción de la actividad. Presentar la expresión algebraica $\mathbf{6n-2(n-1)}$ para analizar la posibilidad de darle sentido a partir de contextos o situaciones cercanas a los estudiantes en los que no se involucre el simbolismo. Intencionalmente se selecciona esta expresión, ya que representa una expresión de generalización de la secuencia con patrón geométrico que se presentará en la actividad C.

Rol de aplicador. Acompañar la reflexión de los profesores y de ser necesario plantear apoyos para lograr que los profesores expresen todo el conocimiento que ponen en juego al dar sentido a una expresión algebraica.

Indicaciones de la actividad.

B.1. Observa la siguiente expresión algebraica y responde

$$\boldsymbol{6n - 2(n - 1)}$$

1. ¿Para un estudiante de primero o segundo de primaria tendrá sentido esta expresión?
2. ¿De qué depende qué tenga sentido?
3. ¿Cómo podría relacionar esta expresión con un contenido impartido en el grado que atiende?

Indicadores a priori MTSK para actividad B.

<table>
<tr>
<td>Indicadores MTSK</td>
<td>MK
*KoT
<u>-Fenomenología:</u>
KoT 1. Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación.
<u>-Propiedades y sus fundamentos</u>
KoT 4. Conocer la propiedad distributiva (propiedad de los números reales)
KoT 6. Conocer que una expresión algebraica se encuentra conformada por variables y constantes.
*KSM
<u>-Conexiones de simplificación:</u>
KSM 1. Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer o segundo grado de primaria a través del conteo y la agrupación.</td>
</tr>
</table>

DESARROLLO DE LA SESIÓN

Actividad C. Completemos el bordado[8]

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **construir una secuencia con patrón geométrico;** así como los *conocimientos* que *ponen en acción* parar reconocer el **patrón**, **extender el razonamiento más allá del rango** que lo originó y a **casos indeterminados.**

Para ello se presentará una secuencia con patrón geométrico a fin de identificar el patrón y extender el razonamiento a casos indeterminados, haciendo evidente el proceso de generalización que se desarrolla.

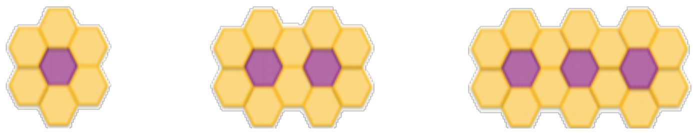
Objetivo didáctico. Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la resolución y análisis de una secuencia para identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Descripción de la actividad. Presentar una secuencia con patrón geométrico a fin de llevar a cabo un proceso de generalización que permita completar la secuencia para casos particulares y extender ese razonamiento más allá del rango en el que originó. Analizarán la secuencia y responderán las actividades de la B1 a la B3, únicamente observando sin construir ninguna figura. Posterior a estas actividades utilizarán hexágonos para construir las figuras que se indiquen, a fin de relacionar la construcción física y el movimiento, con la identificación del patrón y el proceso de generalización.

Rol de aplicador. Apoyar en la aclaración de alguna de las preguntas a fin de que los profesores expongan el conocimiento que ponen en acción para la identificación de patrones y llevar a cabo su proceso de generalización.

Indicaciones de la actividad.
C.1. Observe **individualmente** el siguiente bordado y lea su descripción.

La siguiente imagen representa un bordado de flores formado con hexágono morado representando el centro de la flor y hexágonos amarillos alrededor como pétalos.



De forma **individual** responda.

1. ¿Qué veo?
2. ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?
3. Cómo describiría a una persona el proceso que debe seguir para continuar con el bordado.

C.2. Compartan sus respuestas en colectivo y reflexionen sobre ellas.

[8] Actividad adaptada de Zapatera (2018).

C.3. Analice las siguientes preguntas y responda.

1. Si agregamos un nuevo centro (hexágono morado) ¿cuántos hexágonos amarillos tenemos que agregar al bordado?
2. ¿Cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morados?
3. <u>Sin construir la composición.</u> **Calcule** el número de hexágonos amarillos que tendrán si colocamos **10 hexágonos morados**.
4. Describe cómo obtuvo el resultado.

C.4. Reunidos en **trinas** compartan sus análisis de las respuestas anteriores y respondan a las siguientes consignas apoyándose del <u>material proporcionado</u>**.**

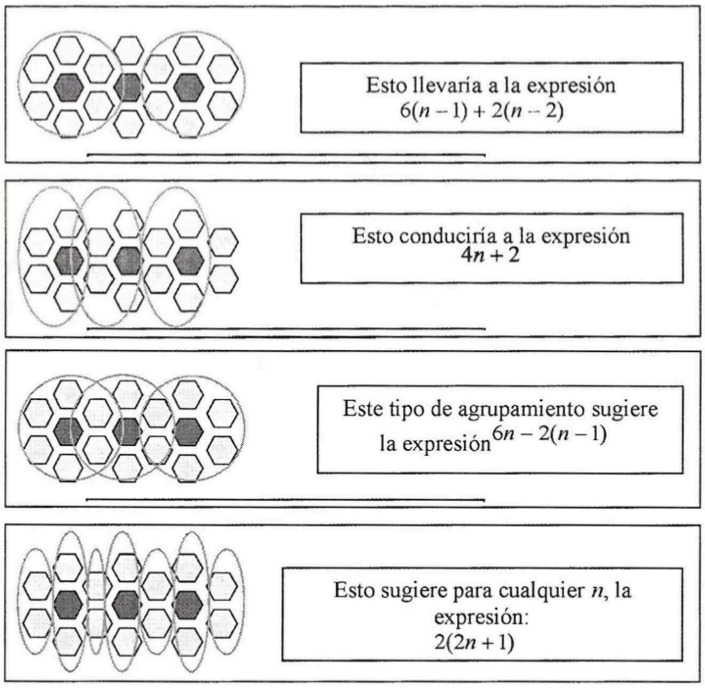
1. Construyan un bordado usando 5 hexágonos morados.
2. Apoyándose en la construcción realizada describan la relación que existe entre la **<u>cantidad de hexágonos morados</u>** y el **<u>número de hexágonos amarillos</u>** que se emplean.
3. Completen la siguiente tabla tomando en cuenta sus análisis

Hexágonos morados	1	2	3	4	5
Hexágonos amarillos	6				

4. Siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿A qué se debe?
5. Si estoy **pensando en una cantidad de hexágonos morados** ¿es posible generar una **expresión** que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría?
6. **Escriban la expresión** que les permita construir el bordado dada una cantidad de flores. Expliquen cómo obtuvieron la expresión.
7. Analicen la expresión construida y **describan la relación** entre la cantidad de hexágonos amarillos y morados.

C.5. Pedir que compartan sus expresiones de generalización, así como el proceso que siguieron para llegar a ésta; a fin de analizarlas y compararlas.

<u>Descripción del cierre de la actividad.</u> Organizar la discusión **grupal** sobre las reflexiones de las preguntas anteriores. Posteriormente cerrar la discusión relacionando el patrón de crecimiento de la secuencia con las expresiones $6(n-1)+2(n-2)$; $4n+2$; $6n-2(n-1)$; $2(2n+1)$, para ello el aplicador se apoyará en las siguientes variables de agrupamiento recuperadas del trabajo de Villa (2006), a fin de identificar el proceso de generalización en cada caso y reconocer que una propiedad de la generalización de patrones geométricos es que el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones las cuáles son algebraicamente equivalentes.



<u>Indicadores a priori MTSK para la actividad C.</u>

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **<u>-Fenomenología</u>** **KoT 2.** Conocer el uso de la generalización para construir secuencias con patrones geométricos y/o numéricos. - **<u>Propiedades y sus fundamentos.</u>** **KoT 5.** Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad. **KoT 7.** Conocer que una propiedad de la generalización de patrones geométricos es que el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes. **<u>-Registro de representaciones</u>:** **KoT 8.** Conocer que un registro para expresar el proceso generalización es el verbal. **KoT 9.** Conocer que un registro para para expresar el proceso de generalización es el gráfico **KoT 10.** Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización es el simbólico. - **<u>Definiciones</u>** **KoT 13.** Saber lo que es una secuencia (definición) **KoT 14.** Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización.

- **Procedimientos.**

KoT 16. Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva.

KoT 17. Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b$ $(b \neq 0)$.

KoT 18. Conocer que un procedimiento para identificar un patrón geométrico en una secuencia es a través de la variable de agrupamiento.

KoT 19. Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó y a casos indeterminados.

KoT 20. Conocer que un procedimiento para hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos es a través de la inversión del proceso de generalización.

***KSM**

- **Conexiones de simplificación.**

KSM 2. Conocer que la generalización se conecta con el conteo y la agrupación mediante el reconocimiento de patrones.

- **Conexiones de complejización.**

KSM 4. Conocer que las secuencias con patrones geométricos se contectan con el tema de expresiones algebraica a través de las expresiones de generalización.

***KPM**

-Prácticas ligadas a una temática específica

KPM 1. Conoce el rol de la generalización en *Early Algebra*.

KPM 2. Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.

KPM 3. Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones.

KPM 4. Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización.

-Prácticas ligadas a la matemática en general

KPM 5. Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.

Actividad D. El tren de colores[9]

<u>Objetivo para la investigación.</u> Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **construir una secuencia con patrón geométrico** de *tres atributos*; así como los *conocimientos* que *ponen en acción* para identificar el **patrón por atributo**, **extender el razonamiento más allá del rango** que lo originó, extender el razonamiento a **casos indeterminados.**

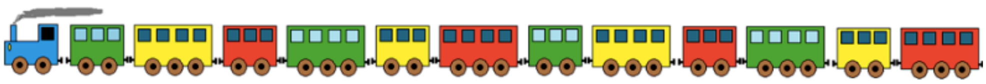
Para ello se presentará una secuencia con patrón geométrico de un tren que tiene tres atributos (colores de vagones, tamaños de vagones y color de las ventanas de los vagones) a fin de identificar el patrón y extender el razonamiento a casos indeterminados, haciendo evidente el proceso de generalización que se desarrolla.

<u>Objetivo didáctico.</u> Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la resolución y análisis de una secuencia para identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

<u>Descripción de la actividad.</u> Presentar una secuencia con patrón geométrico a fin de llevar a cabo un proceso de generalización que permita completar la secuencia para casos particulares y extender ese razonamiento más allá del rango en el que originó. La secuencia que se presenta contiene tres atributos (color, tamaño y color de vidrios de las ventanas) que los profesores deben identificar para generar el núcleo del patrón con ellos y generalizar la construcción de esta secuencia.

<u>Rol de aplicador.</u> Apoyar en la aclaración de alguna de las preguntas a fin de que los profesores expongan el conocimiento que ponen en acción para la identificación de patrones y llevar a cabo su proceso de generalización.

<u>Indicaciones de la actividad</u>
D.1. Observen de manera **grupal** la secuencia de vagones de trenes y describan el patrón de construcción que siguen.



D.2. Individualmente analice la secuencia de vagones de trenes y contesten las siguientes consignas

1. Si considera el color.
   1.1. Rodee con un círculo el núcleo del patrón.
   1.2. Describa el núcleo.
   1.3. ¿Cuántos elementos tiene?
   1.4. Alargue el tren dibujando más vagones considerando este núcleo del patrón.

2. Haga lo mismo, pero con el tamaño.
   2.1. Rodee con un círculo el patrón.
   2.2. Describa el núcleo.

[9] Actividad adaptada de Zapatera (2018).

2.3. ¿Cuántos elementos tiene?
2.4. Alargue el tren dibujando más vagones considerando este núcleo del patrón.

3. Si considera los dos atributos a la vez.
   3.1. ¿Cuál es el núcleo del patrón?
   3.2. ¿Cuántos elementos tiene?
   3.3. Alargue el tren dibujando más vagones considerando este nuevo núcleo de patrón.
   3.4. Compare cómo son las secuencias construidas en cada consigna ¿son iguales? ¿a qué se debe?

4. Observe nuevamente la secuencia de vagones de trenes
   4.1. ¿Existirá otro atributo? ¿cuál es?
   4.2. Rodee con un círculo el patrón tomando en cuenta este nuevo atributo.
   4.3. Describa el núcleo
   4.4. ¿Cuántos elementos tiene?

5. Considerando los tres atributos a la vez.
   5.1. ¿Cuál es el núcleo del patrón?
   5.2. ¿Cuántos elementos tiene?
   5.3. Alargue el tren dibujando más vagones considerando este nuevo núcleo de patrón.

D.3. De acuerdo con lo realizado, escriba por escrito un mensaje a un compañero donde describa el proceso que debe seguir para continuar con la construcción de los vagones del tren.

<u>Indicadores a priori MTSK para la actividad D.</u>

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **<u>-Fenomenología</u>** **KoT 2.** Conocer el uso de la generalización para construir secuencias con patrones geométricos y/o numéricos. **- <u>Propiedades y sus fundamentos.</u>** **KoT 5.** Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad. **KoT 7.** Conocer que una propiedad de la generalización de patrones geométricos es que el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes. **<u>-Registro de representaciones</u>:** **KoT 8.** Conocer que un registro para expresar el proceso generalización es el verbal.

KoT 9. Conocer que un registro para para expresar el proceso de generalización es el gráfico

KoT 10. Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización es el simbólico.

- **Definiciones**

KoT 13. Saber lo que es una secuencia (definición)

KoT 14. Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización.

- **Procedimientos.**

KoT 16. Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva.

KoT 17. Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b$ $(b =/0)$.

KoT 18. Conocer que un procedimiento para identificar un patrón geométrico en una secuencia es a través de la variable de agrupamiento.

KoT 19. Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó y a casos indeterminados.

KoT 20. Conocer que un procedimiento para hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos es a través de la inversión del proceso de generalización.

***KSM**

- **Conexiones de simplificación.**

KSM 2. Conocer que la generalización se conecta con el conteo y la agrupación mediante el reconocimiento de patrones.

- **Conexiones de complejización.**

KSM 4. Conocer que las secuencias con patrones geométricos se contectan con el tema de expresiones algebraica a través de las expresiones de generalización.

***KPM**

-Prácticas ligadas a una temática específica

KPM 1. Conoce el rol de la generalización en *Early Algebra*.

KPM 2. Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización.

KPM 3. Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones.

KPM 4. Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización.

-Prácticas ligadas a la matemática en general

KPM 5. Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.

CIERRE DE LA SESIÓN

Actividad E. El proceso de generalización de patrones

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **reconocer** el **proceso de generalización** (en secuencias con patrones) de sus estudiantes y favorecer su desarrollo.

Para ello se plantean preguntas que permitan profundizar en el conocimiento de los profesores en términos del aprendizaje y enseñanza de la generalización.

Objetivo didáctico. Identificar el proceso de generalización que realizaron al resolver la secuencia con patrón geométrico; así como enlazar ese proceso que vivenciaron ellos con el que enfrentan sus estudiantes a fin de ayudar a su desarrollo.

Descripción de la actividad. Reflexionar acerca del proceso de generalización en los estudiantes de primero y segundo grado; así como hacer evidente los conceptos matemáticos que emergieron durante el desarrollo de la actividad.

Rol de aplicador. Acompañar la reflexión de los profesores y de ser necesario apoyar la comprensión de las preguntas a fin de recuperar la información pertinente. Exponer los conceptos matemáticos que emergieron al resolver las actividades de la primera sesión del taller.

Indicaciones de la actividad (ver anexo 1)

E. 1. A partir de la actividad realizada responda.

1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones?
2. ¿Qué recursos podría emplear para desarrollar el proceso de generalización de patrones en mis estudiantes?
3. ¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer mis estudiantes al generalizar secuencias con patrones?

Descripción del momento de explicación por parte del aplicador.

Retomando los momentos de la actividad anterior el aplicador.

- Expone los conceptos matemáticos que emergieron al resolver las actividades del taller.
    - Patrones
    - Secuencia
    - Generalización
    - Expresión de generalización
- Explica el proceso de generalización que llevaron a cabo.

<u>Indicadores a priori MTSK para actividad E.</u>

Indicadores MTSK	**PCK** ***KFLM** **<u>-Teorías de aprendizaje de las matemáticas</u>** **KFLM 1**. Conocer que una forma de aprendizaje del proceso de generalización es a través de la identificación de patrones. **<u>-Fortalezas y dificultade asociadas al aprendizaje</u>** **KFLM 3.** Conocer que un error que los estudiantes pueden cometer al generalizar es expresar incorrectamente el patrón identificado ***KMT** **<u>-Formar de enseñanza</u>** **KMT 2.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso actividades con patrones. **<u>-Recursos y materiales</u>** **KMT 6.** Conoce la potencialidad del uso de materiales concretos para favorecer el proceso de generalización. ***KMLS** **<u>-Resultados de aprendizaje esperado</u>** **KMLS 1.** Conoce los **Procesos de Desarrollo de Aprendizaje** (PDA) del programa 2022 para primer grado y segundo grado que pueden favorecer el desarrollo del proceso de generalización.

Anexo 3. Intrumento de recogida de datos. Generalización en relaciones funcionales.

INICIO DE LA SESIÓN

Actividad A. Para mí la relación funcional es…

Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *poseen* sobre las **definiciones** de **relación funcional**, así como los **conocimientos** que *ponen en acción* para construir un ejemplo de relación funcional y expresarlo a través de un dibujo.

Objetivo–didáctico. Recuperar el conocimiento previo que los profesores tienen sobre relación funcional. Diseñar un ejemplo de relación funcional.

Descripción de la actividad. Se plantean preguntas a los profesores que permitan recuperar el conocimiento respecto a la definición de relación funcional y aquel que ponen en juego para construir un ejemplo.

Rol de aplicador. Entregar hojas de trabajo donde los profesores contesten las preguntas de manera escrita y diseñen su actividad. Acompañar el proceso de solución de la actividad para asegurar la comprensión de estas y lograr obtener la información que se necesita para el estudio.

Indicaciones de la actividad.
A.1. Reflexione sobre las siguientes preguntas y responda por escrito
1. ¿Qué es una relación funcional?
2. Escriba un ejemplo de relación funcional
3. Intente expresar su ejemplo anterior a través de un dibujo.

Indicadores a priori MTSK de la actividad A.

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **-Definiciones:** **KoT 15.** Conocer que una **relación funcional** se **define** como la correspondencia entre dos o más cantidades que covarían. ***KSM** **-Conexiones de simplificación:** **KSM 3.** Conoce que una relación funcional se conecta con un tema de primero o segundo de primaria a través de problemas aditivos y multiplicativos.

Actividad B. ¿Qué escucho?

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores ponen en acción para **reconocer un patrón de sonido**; así como los **conocimientos** que ponen en acción **para retomar este tipo de experiencia** que favorezcan el aprendizaje de la generalización en sus estudiantes.

Para ello se reproducirá una melodía a fin de que identifiquen el patrón de sonido y sean capaces de continuar con la melodía. De tal manera que reconozcan en qué aspectos pusieron atención o cómo fue posible identificar este patrón.

Objetivo didáctico. Identificar el proceso de generalización que realizaron al resolver la secuencia con patrón geométrico; así como enlazar ese proceso que vivenciaron ellos con el que enfrentan sus estudiantes a fin de ayudar a su desarrollo.

Descripción de la actividad. Reproducir por 30 segundos una melodía en la que se encuentre presente un patrón a fin de que los profesores lo identifiquen y reproduzcan. De esta manera hacer evidente la manera natural con la que identificamos patrones en nuestro entorno.

Rol de aplicador. Reproducir la melodía y recuperar los conocimientos que los profesores ponen en acción para continuar con la melodía.

Indicaciones de la actividad.

B.1. Escuche la melodía que reproducirá su facilitador y responda.

1. ¿Fue posible reproducirla de la manera correcta? ¿a qué se debe?
2. ¿Qué patrón tuvieron que seguir?

B.2. Analice la experiencia y reflexione

1. ¿Cómo favorecería el proceso de generalización en los estudiantes a partir de este tipo de experiencia?

Indicadores a priori MTSK de la actividad B.

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **-Fenomenología:** **KoT 2.** Conocer el uso de la generalización para construir secuencias con patrones. **-Registro de representación:** **KoT 8.** Conocer que un registro para expresar el proceso generalización es el verbal. **KoT 9.** Conocer que un registro para para expresar el proceso de generalización es el gráfico **KoT 10.** Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización es el simbólico. **-Definiciones** **KoT 13.** Saber lo que es una secuencia (definición). **KoT 14.** Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización. ***PCK** **-Teorías de aprendizaje** **KFLM 1**. Conocer que una forma de aprendizaje del proceso de generalización es a través de la identificación de patrones. **-Formas de enseñanza** **KMT 2.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso actividades con patrones.

DESARROLLO DE LA SESIÓN

Actividad C. ¿Cuántos globos para cada invitado?[10]

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **generalizar** una situación que involucra una **relación funcional**.

Para ello analizarán una situación que responde a la relación funcional $\boldsymbol{f(x) = 3x + 1}$, donde el dominio está dado por la cantidad de invitados a una fiesta y el contradominio por la cantidad de globos que se necesitarán dado el número de invitados.

Objetivo didáctico. Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la identificación de la relación funcional existente entre las variables involucradas a fin de identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Descripción de la actividad. Analizar la siguiente situación de generalización que involucra la función $\boldsymbol{f(x) = 3x + 1}$.

> *"En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños"*.

En este caso el dominio es el número de invitados y el contradominio es el número de globos total que se necesitan dada la cantidad de invitados.

Para resolver las consignas C.3. y C.4. se proporcionarán dibujos que representarán los globos, los invitados y la puerta de la casa del cumpleaños.

Rol de aplicador. Acompañar la resolución de las actividades y aclarar de ser necesario las preguntas a fin de recuperar la información pertinente.

Indicaciones de la actividad (ver anexo 2)

C.1. Lean el siguiente planteamiento.

> *"En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños"*.

C.2. Responda de manera individual las siguientes preguntas:

1. Cuando hay 3 invitados se necesitan 10 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?
2. Cuando hay 6 invitados se necesitan 19 globos, ¿qué crees que hizo con los globos?
3. Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?
4. Cuando hay 15 invitados, ¿cuántos globos necesita?
5. ¿Cómo obtuve la respuesta? ¿en qué aspectos puse atención?

---

[10] Actividad adaptada de Ayala-Altamirano y Molina (2021).

6. ¿Cómo ayudarías a un estudiante de 1er grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados?

C.3. Reunidos en trinas compartan sus análisis de la respuesta anteriores y respondan nuevamente las preguntas con ayuda del material proporcionado.

1. ¿Cómo apoyó el uso del material a responder las preguntas de la actividad C.2?
2. ¿Cómo consideran que puede ayudar el uso del material a los estudiantes para identificar la relación entre las variables involucradas?
3. Apoyándose en la experiencia con el material utilizado *describan* la relación que existe entre el **número de globos** y el **número de invitados.**
4. Construya una tabla que le permita registrar la cantidad de globos que se necesitan para 1, 2, 3, 4, 5 y 6 invitados.

C.4. Con ayuda del material proporcionado respondan la siguiente pregunta.

1. Un niño de la clase dice que hay 8 invitados, por lo que necesitarán 22 globos. ¿Están de acuerdo con él?
2. ¿Cómo le explicaría a Isabel qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños?
3. Cuando hay "muchos" / "infinitos" invitados, ¿cuántos globos necesita?
4. Cuando hay R invitados, ¿cuántos globos necesita?
5. ¿Es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos" ?, ¿por qué?
6. ¿Es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan W globos" ?, ¿por qué?
7. Si estoy pensando en una cantidad de invitados ¿es posible generar una expresión que me ayude a saber la cantidad de globos que necesito? ¿cómo lo harías?
8. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de globos dada una cantidad de invitados.
9. Analicen la expresión construida y describe la relación entre la cantidad de globos y de invitados.

C.5. Reflexione sobre lo que implica esta actividad para sus estudiantes

1. ¿Cómo puede apoyar esta actividad al desarrollo del proceso de generalización de mis estudiantes?
2. ¿Qué conocimientos puede producir esta actividad para mis estudiantes?
3. ¿Cómo explicaría a los estudiantes el proceso de generalización existente en la relación funcional en esta actividad?
4. ¿Qué agregaría o modificaría a la actividad? ¿por qué?

Descripción del cierre de la actividad. Organizar la discusión **grupal** sobre las reflexiones de la experiencia con la actividad. Posteriormente cerrar la discusión relacionando el funcionamiento de la máquina con la relación funcional $\boldsymbol{f(x) = 3x + 1}$**.**

<u>Indicadores a priori MTSK para la actividad C.</u>

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **<u>-Fenomenología</u>** **KoT 3.** Conocer el uso de la generalización para resolver relaciones funcionales. - **<u>Propiedades y sus fundamentos.</u>** **KoT 5.** Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad. **<u>-Registro de representaciones</u>:** **KoT 8.** Conocer que un registro para expresar el proceso generalización es el verbal. **KoT 9.** Conocer que un registro para para expresar el proceso de generalización es el gráfico **KoT 10.** Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización es el simbólico. - **<u>Definiciones</u>** **KoT 14.** Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización. - **<u>Procedimientos.</u>** **KoT 16.** Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva. **KoT 17.** Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b\ (b \neq 0)$. **KoT 19.** Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó y a casos indeterminados. ***KPM** **<u>-Prácticas ligadas a una temática específica</u>** **KPM 1.** Conoce el rol de la generalización en *Early Algebra*. **KPM 2.** Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización. **KPM 3.** Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones. **KPM 4.** Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización. **<u>-Prácticas ligadas a la matemática en general</u>** **KPM 5.** Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.

Actividad D. ¿Cómo funciona la máquina?[11]

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **generalizar** una situación de **relación funcional**.

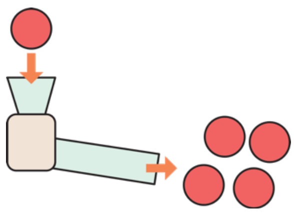
Para ello analizaran el funcionamiento de una máquina que está diseñada bajo la relación funcional $\boldsymbol{f(x) = x + 3}$.

Objetivo didáctico. Reconocer las acciones implicadas dentro del proceso de generalización a través de la resolución y análisis de una relación funcional a fin de identificar de qué manera contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

Descripción de la actividad. Analizar el funcionamiento de una máquina que involucra la función $\boldsymbol{f(x) = x + 3}$, donde la variable independiente es el número de bolas que entra en la máquina y la variable dependiente, el número de bolas que sale.

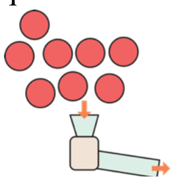
Rol de aplicador. Acompañar la resolución de las actividades y aclarar de ser necesario las preguntas a fin de recuperar la información pertinente.

Indicaciones de la actividad (ver anexo 2)
D. 1. Observe la siguiente imagen y responde.

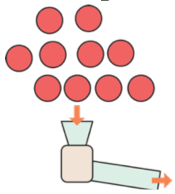


1. ¿Qué veo?
2. ¿Puedo explicar cómo funciona la máquina?

D. 2. Retomando el funcionamiento de la máquina, responda.
1. ¿Cuántas bolas saldrán de la maquina si metemos la siguiente cantidad de pelotas?



2. ¿Y si metemos la siguiente cantidad de pelotas?



3. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 7 bolas?
4. Ponga el número de bolas que desee al principio de la máquina ¿cuántas bolas salen?

[11] Actividad retomada de Narváez et al (2023).

5. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?

D. 3. Compartan sus expresiones para analizarlas y compararlas.

D. 4. Responda los siguientes planteamientos de falso-verdadero
1. Si en la máquina metes 4 bolas, salen 7 bolas. V/F
2. En la máquina siempre salen 2 bolas más que las bolas que has metido. V/F
3. En la máquina siempre salen 3 bolas más que las bolas que has metido. V/F
4. En la máquina siempre sale el doble del número de bolas que has metido. V/F
5. Si meto A bolas en la máquina, salen A bolas. V/F
6. Si meto A bolas en la máquina, salen A+ 1 bolas. V/F
7. Si meto A bolas en la máquina, salen A+ 3 bolas. V/F

D. 5. Conteste las siguientes preguntas
1. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de pelotas que entra y la cantidad de pelotas que sale?
2. Si estoy pensando en una cantidad de bolas para meter a la máquina ¿es posible generar una expresión que me ayude a saber la cantidad de bolas que obtendré? ¿cómo lo harías?
3. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de bolas que saldrán de la máquina si meto una determinada cantidad.
4. Analice la expresión construida y describa la relación entre la cantidad de bolas que ingreso a la máquina y la cantidad que sale.

D. 6. Compartan sus expresiones para analizarlas y compararlas.

Descripción del cierre de la actividad. Organizar la discusión **grupal** sobre las reflexiones de la experiencia con la actividad. Posteriormente cerrar la discusión relacionando el funcionamiento de la máquina con la regla de asociación entre las cantidades involucradas; $\boldsymbol{f(x) = x + 3}$.

<u>Indicadores a priori MTSK para actividad D</u>

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **<u>-Fenomenología</u>** **KoT 3.** Conocer el uso de la generalización para resolver relaciones funcionales. - **<u>Propiedades y sus fundamentos.</u>** **KoT 5.** Conocer que una *propiedad* de la generalización es que la relación entre las variables está dada por un patrón o regularidad. **<u>-Registro de representaciones</u>:** **KoT 8.** Conocer que un registro para expresar el proceso generalización es el verbal. **KoT 9.** Conocer que un registro para para expresar el proceso de generalización es el gráfico

	KoT 10. Conocer que un registro para expresar el proceso de generalización es el simbólico. - **<u>Definiciones</u>** **KoT 14.** Saber lo que es un patrón (definición) desde la generalización. - **<u>Procedimientos.</u>** **KoT 16.** Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de la aproximación recursiva. **KoT 17.** Conocer que un procedimiento para encontrar la relación entre las variables es a través de un esquema lineal, en el que la respuesta corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an + b$ $(b \neq 0)$. **KoT 19.** Conocer que un procedimiento para generalizar es identificar el patrón o regularidad, extender el razonamiento más allá del rango que lo originó y a casos indeterminados. ***KPM** **<u>-Prácticas ligadas a una temática específica</u>** **KPM 1.** Conoce el rol de la generalización en *Early Algebra*. **KPM 2.** Conocer el papel de la toma conciencia de una propiedad común dentro del proceso de generalización. **KPM 3.** Conocer el rol de la generalización para construir secuencias con patrones. **KPM 4.** Conocer el papel de extender el razonamiento a casos indeterminados para lograr el proceso de generalización. **<u>-Prácticas ligadas a la matemática en general</u>** **KPM 5.** Conocer la importancia de la prueba en matemáticas para validar una expresión algebraica.

Actividad E. El proceso de generalización en las relaciones funcionales.

<u>Objetivo para la investigación.</u> Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **reconocer** el **proceso de generalización** (en relaciones funcionales) de sus estudiantes y favorecer su desarrollo.

Para ello se plantean preguntas que permitan profundizar en el conocimiento de los profesores en términos del aprendizaje y enseñanza de la generalización.

<u>Objetivo didáctico.</u> Identificar el proceso de generalización que realizaron al identificar la relación funcional existente entre las variables involucradas; así como enlazar ese proceso que vivenciaron con el que enfrentan sus estudiantes a fin de ayudar a su desarrollo.

<u>Descripción de la actividad.</u> Reflexionar acerca del proceso de generalización en los estudiantes de primero y segundo grado; así como hacer evidente los conceptos matemáticos que emergieron durante el desarrollo de la actividad.

Rol de aplicador. Acompañar la reflexión de los profesores y de ser necesario apoyar la comprensión de las preguntas a fin de recuperar la información pertinente. Exponer los conceptos matemáticos que emergieron al resolver las actividades de la primera sesión del taller.

Indicaciones de la actividad.
E. 1. A partir de las actividades realizadas responda.

1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de las relaciones funcionales?
2. ¿Qué recursos podría emplear para desarrollar el proceso de generalización con relaciones funcionales en mis estudiantes?
3. ¿Cuáles son los posibles errores que podrían cometer mis estudiantes al generalizar relaciones funcionales?
5. ¿Qué temas de los abordados en el grado que imparte es posible recuperar para favorecer el proceso de generalización en sus estudiantes?

Descripción del momento de explicación por parte del aplicador.
Retomando los momentos de la actividad anterior el aplicador.

- Expone los conceptos matemáticos que emergieron al resolver las actividades del taller.
  - Relaciones funcionales
  - Variable dependiente
  - Variable independiente
- Explica el proceso de generalización que llevaron a cabo con relaciones funcionales.

Indicadores MTSK para la actividad E.

Indicadores MTSK	**PCK** ***KFLM** **-Teorías de aprendizaje de las matemáticas** **KFLM 2.** Conocer los contenidos matemáticos previos que puede retomar para diseñar una situación y fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico. **-Fortalezas y dificultade asociadas al aprendizaje** **KFLM 3.** Conocer que un error que los estudiantes pueden cometer al generalizar es expresar incorrectamente el patrón identificado ***KMT** **-Formar de enseñanza** **KMT 4.** Conocer la potencialidad que tiene en la enseñanza del proceso de generalización el uso de situaciones de variación. **-Recursos y materiales** **KMT 6.** Conoce la potencialidad del uso de materiales concretos para favorecer el proceso de generalización. ***KMLS** **-Resultados de aprendizaje esperado** **KMLS 1.** Conoce los **Procesos de Desarrollo de Aprendizaje** (PDA) del programa 2022 para primer grado y segundo grado que pueden favorecer el desarrollo del proceso de generalización.

CIERRE DE LA SESIÓN

Actividad F. Diseñando una situación[12]

Objetivo para la investigación. Esta actividad nos ayudará a atender el segundo objetivo particular de la investigación, en términos de **identificar** los **conocimientos** que los profesores *ponen en acción* para **conectar** el **contenido** que imparten en su **grado escolar** con una **expresión algebraica**, a fin de darle sentido desde el proceso de generalización (con patrones o relaciones funcionales)

Para ello se plantean una relación algebraica para que los profesores pueden diseñar una actividad que tenga sentido para los estudiantes del grado que imparten.

Objetivo didáctico. Construir una situación acorde al grado escolar que imparten en donde una expresión algebraica tenga sentido para los estudiantes y puedan desarrollar su proceso de generalización.

Descripción de la actividad. Se retoma la actividad A.2. de la sesión 1 a fin de diseñar nuevamente una actividad que se ajuste a una relación algebraica dada a fin de identificar los conocimientos sobre generalización que pone en acción los profesores después de la experiencia con las actividades del taller. Para esta actividad se brinda más tiempo para que los profesores puedan reflexionar de forma más profunda sobre los diseños.

Rol de aplicador. Orientar en caso de existir dudas en algunas preguntas.

Indicaciones de la actividad (ver anexo 2)
F.1. Observe la siguiente expresión:

$$\mathbf{3(n+2)}$$

1. ¿Cómo mostraría a sus estudiantes la relación representada en esta expresión, sin usar símbolos algebraicos?
2. Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.

F.2. Analice **individualmente** su diseño respondiendo las siguientes preguntas.
1. ¿Qué aspectos consideré para construir la situación?
2. De qué manera los datos de mi situación se encuentran relacionados con la expresión dada.
3. ¿Cómo pueden desarrollar el proceso de generalización mis estudiantes a través de la actividad diseñada?
4. ¿Cuáles pueden ser los posibles errores que mis estudiantes cometan en esta actividad? ¿Cómo puedo apoyarlos a superarlos?
5. ¿Qué representaciones puedo utilizar para apoyar a mis estudiantes a comprender la situación planteada?
6. ¿Qué ayudas serán necesarias que realice con mis estudiantes para favorecer su proceso de generalización?

[12] Actividad retomada de Hohensee (2017).

7. ¿Cómo me será posible evaluar el proceso de generalización que llevan a cabo mis estudiantes? ¿qué expresiones o manifestaciones me permitirán identificar que están generalizando?

E.3. Comparten y analizan algunas construcciones de manera **grupal**.

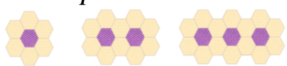
Indicadores MTSK para la actividad F.

Indicadores MTSK	**MK** ***KoT** **-Fenomenología:** **KoT 1.** Conocer que una forma de ubicar una expresión algebraica en primer o segundo grado es a través de la generalización de una situación de variación ***KSM** **-Conexiones de simplificación:** **KSM 1.** Conocer que una expresión algebraica se conecta con un tema de primer o segundo grado de primaria a través del conteo y la agrupación. **-Coneciones de complejización** **KSM 4.** Conocer que las secuencias con patrones geométricos se contectan con el tema de expresiones algebraica a través de las expresiones de generalización. **PCK** ***KFLM** **-Teorías de aprendizaje de las matemáticas** **KFLM 1**. Conocer que una forma de aprendizaje del proceso de generalización es a través de la identificación de patrones. **KFLM 2.** Conocer los contenidos matemáticos previos que puede retomar para diseñar una situación y fomentar el aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico. **- Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje** **KFLM 3.** Conocer que un error que los estudiantes pueden cometer al generalizar es expresar incorrectamente el patrón identificado. **- Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático** **KFLM 4.** Conoce que una manera en la que los estudiantes hacen evidente la identificación de un patrón es a través de expresiones como "lo que se repite". **KFLM 5.** Conoce que una manera en la que los estudiantes resuelven situaciones de generalización de patrones lineales es a través de la estrategia aditiva. ***KMT** **-Formas de enseñanza** **KMT 1.** Conoce la potencialidad que tienen para la enseñanza de la generalización de patrones el uso de la variable de agrupamiento.

	KMT 2. Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de la generalización el uso actividades con patrones. **KMT 3.** Conocer la potencialidad que tiene para la enseñanza de *Early Algebra* el uso de actividades que favorezcan la generalización como lo son las secuencias con patrones geométricos. **KMT 4.** Conocer la potencialidad que tiene en la enseñanza del proceso de generalización el uso de situaciones de variación. **<u>-Ejemplos y ayudas</u>** **KMT 5.** Conoce que una forma de ayuda para que los estudiantes encuentren la expresión de generalización es identificar los datos variantes e invariantes en la relación. **<u>-Recursos y materiales</u>** **KMT 6.** Conoce la potencialidad del uso de materiales concretos para favorecer el proceso de generalización. ***KMLS** **<u>-Resultados de aprendizaje esperado</u>** **KMLS 1.** Conoce los **Procesos de Desarrollo de Aprendizaje** (PDA) del programa 2022 para primer grado y segundo grado que pueden favorecer el desarrollo del proceso de generalización. **<u>-Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental</u>** **KMLS 2.** Conocer que en la fase 3 de la Nueva Escuela Mexicana, se debe ofrecer un primer acercamiento a la modelación, la secuenciación y poder resolver situaciones análogas y nuevas. **<u>-Secuencia de temas</u>** **KMLS 3.** Conocer que los PDA de primer grado y segundo grado tiene secuencia con los PDA de 3ero "identificar y representar **regularidades** presentes en la **naturaleza**".

Anexo 4. Guión de entrevista semiestructurada, Mtra. Ana.

SESIÓN: GENERALIZACIÓN EN PATRONES		
Actividad	Pregunta asociada	Intención
A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $\boldsymbol{3(n+2)}$**;** sin usar símbolos algebraicos.	Usted plantea la siguiente actividad. *"3 compañeros compraron 1 agua que costó 2 pesos y 1 gordita, ¿cuánto pagaron los 3 compañeros"* **¿De qué manera este planteamiento da sentido a la expresión algebraica? ¿Con qué tema del curriculum vigente se relaciona su planteamiento?**	Identificar que se empleó de forma adecuada la propiedad distributiva que se encuentra presente en la expresión algebraica. Identificar el conocimiento que el profesor tiene sobre los temas abordados en el nivel que imparte y que pueden relacionarse con la expresión algebraica.
B.1. Observe la siguiente expresión algebraica y responda $\boldsymbol{6n-2(n-1)}$ 3. ¿Cómo podría **relacionar esta expresión** con un **contenido** impartido en el **grado** que atiende?	En la respuesta dada a la pregunta usted respondió que puede relacionarse con los temas de sumas y restas, así como series con imágenes **¿Podría explicar con más detalle cómo es que podría relacionarse la expresión algebraica con esos temas?** **¿De qué manera considera que los temas de sumas y restas o series con imágenes pueden favorecer el pensamiento algebraico?**	Profundizar en los argumentos de conexión entre los temas señalados (abordados en primer grado) y una expresión algebraica a fin de reconocer si el profesor presenta conocimiento de las estructuras matemáticas. Indicador *Conexiones de simplificación* Conocer que una expresión algebraica se conecta con la solución a problemas con una variable. *Conexiones de complejización* Conocer que los temas como secuencia con patrones se conecta con la generación de expresiones algebraica.
C.1. Observe el siguiente bordado, lea su descripción y responda las preguntas.	En la respuesta dada a la pregunta usted menciona que sí es posible continuar con el bordado porque es una **secuencia**.	Identificar los argumentos para afirmar que la imagen es una secuencia a fin de reconocer si el profesor

La siguiente imagen representa un ***bordado de flores*** *formado con hexágono morado representando el centro de la flor y hexágonos amarillos alrededor como pétalos.*  2. ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?	**¿Podría decirme para usted qué es una secuencia?**	conoce y usa adecuadamente la definición de secuencia.
C.3. 2. ¿Cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morado?	Usted responde ante esta pregunta que el aumento es “4 a 1 o 1 a 4” **¿A qué se refiere esta expresión? ¿podría profundizar?**	Aclarar si la expresión que usa está asociada a un crecimiento proporcional y de qué manera lo relaciona con el crecimiento de la secuencia a fin de identificar si el conocimiento del profesor se encuentra asociado a las propiedades y fundamentos.
C.3. 3. Sin construir la composición. Calcule el número de hexágonos amarillos que tendrán su colocamos 10 hexágonos morados.	Usted responde que son 42 hexágonos amarillos y realiza la siguiente operación $10 \times 4 = 40 + 2 = 42$ **¿Por qué multiplica 10 por 4 y suma 2?**	Comprender el planteamiento de su esquema lineal y los argumentos que presenta para la construcción de este.
C.4.4. Siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿a qué se debe?	Usted responde que no, porque falta un amarillo. **¿Cómo sabe que falta un hexágono amarillo? ¿qué proceso realiza para llegar a esa conclusión?**	Identificar la estrategia utilizada para llevar a cabo la inversión del proceso de generalización e identificar si presenta un KPM.
C.4.5. Si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados ¿es posible generar una expresión que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría?	Usted afirma que la expresión $(n \times 4) + 2$ ayuda a encontrar la cantidad de hexágonos amarillos si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados	Profundizar el proceso que siguió para construir la expresión algebraica a fin de identificar mayores elementos de los conocimientos de KoT *(procedimientos, registros*

	¿Por qué? ¿cómo llega a esa conclusión? ¿de qué aspectos se apoya para generar dicha expresión?	*de representación)* que pone en acción la profesora, así como identificar si en su proceso acciona conocimiento del KPM.
E.1.1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones?	En la pregunta E.1. usted responde que el proceso de generalización se puede favorecer diseñando diversas actividades, tanto lúdicas como concretas **¿Por qué considera que este tipo de actividades pueden ayudar a favorecer el proceso de generalización?**	Profundizar en los argumentos por los cuales considera potenciales en el proceso de generalización el uso de actividades lúdicas y concretas a fin de confirmar el conocimiento de formas de enseñanza de la profesora. KMT.

SESIÓN: GENERALIZACIÓN EN RELACIONES FUNCIONALES		
Actividad	Pregunta asociada	Intención
C.2.5. ¿Cómo obtuve la respuesta (de los casos particulares)? ¿En qué aspectos puse atención?	Usted responde que en la pregunta 1 y 2, dedujo que el número de globos para cada invitado eran 3 globos, por la repetición y así poder multiplicar el número 3 por cada invitado **¿A qué refiere con la repetición?**	Identificar que la profesora hace uso del patrón para llevar la generalización más allá del rango que lo originó.
F. Observe la siguiente expresión: $\boldsymbol{3(n+2)}$ Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.	En la actividad F ustedes diseñaron una actividad que diera sentido a la expresión algebraica $\boldsymbol{3(n+2)}$ En las anotaciones que usted realiza para diseñar la actividad, le da un valor a "n" y resuelve la expresión. **¿Por qué realiza lo realiza? ¿cómo le apoya esto en el diseño de su actividad?**	Identificar el conocimiento sobre procedimientos que puso en acción la profesora para comprender la expresión algebraica y diseñar una situación que diera sentido a la misma.
F. Observe la siguiente expresión:	En el diseño de actividad, usted con contempla el uso	Identificar el conocimiento que la profesora tiene sobre

$\mathbf{3(n+2)}$ Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.	de materiales concreto como fichas, monedas, dibujos. **¿Por qué considera importante el uso de estos materiales en su diseño?**	la potencialidad que tiene en la enseñanza del proceso de generalización el uso de materiales concretos.
F. Observe la siguiente expresión: $\mathbf{3(n+2)}$ Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes. **F.2.** ¿Qué aspectos consideró para construir la situación?	En la actividad donde diseñó una situación del mundo real dada la expresión algebraica $3(n+2)$, usted reconoce que para poder elaborarla tomó en cuenta conocimientos previos de los estudiantes **¿Qué conocimientos previos recuperó? ¿a qué se refiere con el nivel de conocimiento de números?**	Recuperar el tipo de conocimiento previo de los estudiantes que retoma para el diseño de la actividad a fin de identificar el KMT que pone en acción a la profesora.

Anexo 5. Transcripción de entrevista semiestructurada, Mtra. Ana.

Fecha: lunes 11 de marzo del 2024/06:00pm	
Parte 1 (00:00-18:15)	
1	*Se inicia saludando tanto el entrevistador como el entrevistado, se le pide autorización y consentimiento para grabar la entrevista.*
2	*Se inicia con la primera parte que corresponden a las preguntas sobre la primera parte del instrumento de recogida de dato "Generalización en patrones"*
3	*Entrevistador (E), Maestra Ana (MA)*
4	**E:** Muy bien vamos a iniciar la entrevista. Vamos a revisar las respuestas dadas a algunas de las actividades abordadas en el taller "Docentes de 1er y 2do de primaria que desarrollan su proceso de generalización". La intención de esta entrevista es profundizar en las respuestas y argumentos dados en alguna de las actividades realizadas, por lo que a continuación me permitiré proyectar aquellas sobre las que se encuentra importante aclarar algunos aspectos.
5	Comenzamos con la primera parte con preguntas correspondiente a la sesión "Generalización en patrones".
6	**E:** Profundizando un poco en la primera actividad. En la parte donde se les pide diseñar una actividad que de sentido a la expresión $3(n+2)$, usted plantea la siguiente situación *"3 compañeros compraron 1 agua que costó 2 pesos y 1 gordita, ¿cuánto pagaron los 3 compañeros"* **¿De qué manera este planteamiento da sentido a la expresión algebraica?**
7	**MA:** En la actividad el n representaría el valor de costo de la gordita, ya que de este producto no se sabe el valor o puede tomar cualquier valor, mientras que el costo del agua se mantiene que es 2 pesos. Como cada compañero compró lo mismo, es decir un agua y una gordita, y lo que se quiere saber es cuánto pagan entre los tres compañeros. Pues se tiene que multiplicar el gasto de un agua de dos pesos más del de una gordita que no sabemos su precio por tres.
8	**E:** Y, **¿con qué tema del curriculum vigente se relaciona su planteamiento?**
9	**MA:** Esta situación se relaciona con el tema de problemas aditivos, en este caso el problema tiene un valor desconocido o que puede variar.
10	**E:** Pasando a la actividad B, en esta se pide observar la siguiente expresión algebraica $6n-2(n-1)$

	En la respuesta dada a la pregunta ¿Cómo podría relacionar esta expresión con un contenido impartido en el grado que atiende? usted respondió que puede relacionarse con los temas de sumas y restas, así como series con imágenes **¿Podría explicar con más detalle cómo es que podría relacionarse la expresión algebraica con esos temas? ¿De qué manera considera que los temas de sumas y restas o series con imágenes pueden favorecer el pensamiento algebraico?**
11	**MA:** La expresión puede conectarse con las "series con imágenes", porque por ejemplo en un examen que aplicamos venía una pregunta donde ellos tenían que observar una "secuencia de figuras", venía un cuadrado, un triángulo, un cuadrado, un triángulo y así, y les preguntaban ¿qué figura sigue? Ahí ellos tenían que identificar pues el patrón, eso que se repite para poder responder a la pregunta. En la edad que ellos tienen la visualización es muy importante pues, aunque no se les presente una expresión algebraica, nosotros como profesores podemos plantear situaciones cómo estás donde ellos relacionen y se anticipen a resultados. También, por ejemplo, en estos grados se trabajan problemas de sumas y restas y los inicios de la multiplicación, entonces podemos plantearles situaciones con valores desconocidos o que ellos vayan asignando el valor para encontrar una relación. Entonces creo que hay muchos temas que se abordan en estos grados en los estudiantes pueden estudiar la relación y así trabajar el pensamiento algebraico.
12	**E:** Pasando a la actividad C, dónde se presenta una secuencia con patrón geométrico, en la respuesta dada a la pregunta ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué? usted menciona que sí es posible continuar con el bordado porque es una secuencia. **¿Podría decirme para usted qué es una secuencia?**
13	**MA:** Para mí una secuencia es dar una continuidad de algo que va ordenado.
14	**E:** Siguiendo con esta misma actividad cuando se les pregunta ¿cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morado? Usted responde ante esta pregunta que el aumento es "4 a 1 o 1 a 4" **¿A qué se refiere esta expresión? ¿podría profundizar?**
15	**MA:** Significa que el crecimiento es 4 a 1 porque por cada 4 hexágonos amarillos hay uno morado o vicecersa, por cada hexágono morado que se agrega se incrementan 4 amarillos. Es decir identifica que su crecimiento esta dado por un patrón.
16	**E:** Posteriormente se les pide que sin construir la composición. Calculen el número de hexágonos amarillos que tendrán su colocamos 10 hexágonos morados. Usted responde que son 42 hexágonos amarillos y realiza la siguiente operación $10 \times 4 = 40 + 2 = 42$

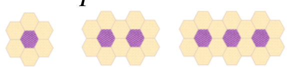
	¿Por qué multiplica 10 por 4 y suma 2?
17	**MF:** Para seguir la secuencia tomando la base se necesitan aumentar 4 hexágonos amarillos por cada centro, por lo tanto, como son 10 hexágonos morados multiplico por 10×4, pero tengo que sumar dos, porque en la primera flor, la de inicio, se tienen 6 hexágonos amarillos, pero como solo tomé 4 entonces tengo que aumentar los 2 hexágonos que no tomé en cuenta. Lo que hago es tomar el patrón que encontré que es de 4 en 4, pero como le digo hay dos que están en el inicio que siempre se tienen que sumar sin importar el número de hexágonos morados.
18	**E:** Posteriormente se les pregunta que siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿a qué se debe? Usted responde que no, porque falta un amarillo. **¿Cómo sabe que falta un hexágono amarillo? ¿qué proceso realiza para llegar a esa conclusión?**
19	**MA:** lo que hice fue buscar un número que multiplicado por 4 se acercara a 25, por lo que multipliqué 4 por 6 y obtuve 24, pero como se suman los 2 del inicio, como le explicaba en la pregunta anterior, el resultado da 26. Por eso digo que falta un hexágono amarillo para construir la secuencia siguiendo el patrón dado.
20	**E:** En la pregunta C.4.5. Si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados ¿es posible generar una expresión que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría? Usted afirma que la expresión $(n \times 4) + 2$ ayuda a encontrar la cantidad de hexágonos amarillos si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados **¿Por qué? ¿cómo llega a esa conclusión? ¿de qué aspectos se apoya para generar dicha expresión?**
21	**MA:** Recupero el patrón que identifiqué, es decir que aumenta de 4 en 4. Entonces guiándome de lo que hice en las otras actividades me di cuenta de que lo tengo que hacer es multiplique el número de hexágonos morados, que son los centros, por 4 y luego sumarle 2. Vi que el 4 y el 2 son constantes, es decir no cambian, siempre se multiplicará por 4 y se le sumará 2, lo que cambia el son los centros de la flor, por lo tanto, asigno una letra en este caos n.
22	**E:** Ahora, pasando a la actividad E, en la pregunta ¿cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones? usted responde que el proceso de generalización se puede favorecer diseñando diversas actividades, tanto lúdicas como concretas **¿Por qué considera que este tipo de actividades pueden ayudar a favorecer el proceso de generalización?**

23	**MA:** Bueno, yo pienso esto, porque de acuerdo con mi experiencia docente y los procesos de actualización en los que he participado, en cuestión de matemáticas es muy importante trabajar con material concreto, porque de acuerdo con su edad este tipo de materiales les permiten comprender conceptos que pueden ser complejos, por ejemplo, la multiplicación como suma iterada la pueden comprender formando agrupaciones con semillas. También influye el estilo de aprendizaje, con las pruebas diagnósticas que se aplican al inicio del ciclo escolar podemos identificar si el estudiante es kinestésico, auditivo y visual, y de acuerdo con estos resultados son los materiales que podemos utilizar. Entonces pues yo creo que, así como muchos conceptos matemáticos se pueden comprender con este tipo de materiales, también la generalización, ya que los estudiantes pueden ver los patrones, y pueden sentirlos de alguna forma, pues cuando colocan los fichas en el movimiento también identifican que ciertos movimientos se repiten.
Parte 2 (18:16-35:05)	
24	*Se continua con la siguiente parte que corresponden a las preguntas sobre la segunda parte del instrumento de recogida de dato "Generalización en relaciones funcionales"*
25	*Se explica al entrevistado que ahora se revisaran algunas respuestas dadas a las actividades correspondientes a la generalización en relaciones funcionales, siguiendo una dinámica similar a la realizada en la primera parte*
26	**E:** Comenzando con la actividad C, se le pide explicar cómo obtuvo la cantidad de globos que se necesitan por cada invitado y los globos totales cuando se da una determinada cantidad de invitados, en qué aspectos puso atención. Usted responde que en la pregunta 1 y 2, dedujo que el número de globos para cada invitado eran 3 globos, por la repetición, y así poder multiplicar el número 3 por cada invitado **¿A qué refiere con la repetición?**
27	**MA:** Es como la actividad de la flor, es el aumento, que aumenta la misma cantidad. Sería el patrón, lo que se repite de forma constante, en este caso pues son 3 globos por invitados y hay una constante que es el globo de la puerta. Analizar los casos concretos me permitió deducir ese patrón y luego usarlo para calcular la cantidad de globos que se necesitan para 5 y 15 invitados.
28	**E:** Pasando a la última actividad, ustedes diseñaron una actividad que diera sentido a la expresión algebraica $\mathbf{3(n+2)}$ En las anotaciones que usted realiza para diseñar la actividad, le da un valor a "n" y resuelve la expresión. **¿Por qué realiza lo realiza? ¿cómo le apoya esto en el diseño de su actividad?**
29	**MA:** Darle un valor a "n" me permitió comprender la relación algebraica, para identificar cómo se comportan los datos y a partir de ello plantear la situación. Así

	identifique cómo las constantes, 3 y 2, se relacionan con la variable y a partir de esto generar un planteamiento.
30	**E:** En el diseño de actividad, usted con contempla el uso de materiales concreto como fichas, monedas, dibujos. **¿Por qué considera importante el uso de estos materiales en su diseño?**
31	**MA:** Estos materiales ayudan al estudiante a comprender las situaciones matemáticas. La manipulación en la edad que ellos se encuentran es muy importante ya que permite que tengan sentido ciertos conceptos y también que deduzcan relaciones. Por ejemplo, pueden identificar cómo cambia una cantidad al incrementar otra. En la situación que planteé hay tres hermanos, entonces puedo dar tres siluetas de niños. Se sabe que cada uno tiene dos pesos, entonces se reparte a cada hermano dos pesos. Luego, la mamá le da cierta cantidad de dinero igual a cada uno, este es un valor desconocido, ellos pueden asignar diferentes valores y ver cómo es que cambia el resultado y qué relación tiene.
32	**E:** Continuando con el diseño de la actividad. Se les cuestiona en el inciso F.2. ¿Qué aspectos consideró para construir la situación? usted reconoce que para poder elaborarla tomó en cuenta conocimientos previos de los estudiantes y el nivel de conocimiento numérico. **¿Qué conocimientos previos recuperó? ¿a qué se refiere con el nivel de conocimiento numérico?**
33	**MF:** Bueno, como en todo tema que se inicia es importante retomar lo que los estudiantes saben y dominan. Por lo tanto, en el diseño consideré el dominio que los estudiantes tienen sobre los números, en este caso me refiero a las operaciones que ellos pueden realizar, como lo son sumas, restas, multiplicación, pues son las operaciones involucradas en la expresión algebraica. Considero que el dominio que los estudiantes tengan sobre los números apoya en la comprensión de este tipo de situaciones, ya que pueden encontrar relaciones entre los datos involucrados y cómo se comportan.
34	**E:** Pues esto sería todo, le agradezco su tiempo y disposición para llevar a cabo esta reunión y poder profundizar sobre las actividades realizadas en el taller.

Anexo 6. Guión de entrevista semiestructurada, Mtr. Fernando

SESIÓN: GENERALIZACIÓN EN PATRONES		
Actividad	Pregunta asociada	Intención
A.1.2. ¿Qué es el pensamiento algebraico?	Usted responde que es un tipo de pensamiento que ayuda a comprender procesos abstractos, lógicos y que implica el uso de símbolos y expresiones matemáticas y sus relaciones. **¿Qué papel juegan los símbolos y expresiones?**	Profundizar en los argumentos de la definición de pensamiento algebraico a fin de identificar si corresponden con la *definición* matemática.
A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $\mathbf{3(n+2)}$**;** sin usar símbolos algebraicos.	Usted plantea la siguiente actividad. *"Piensen en un número y luego le vamos a sumar 2 y después multiplicar el número que nos salió por tres"* **¿Cómo considera que su planteamiento le da sentido a la expresión $3(n+2)$? ¿cómo se encuentran relacionados los datos? ¿agregaría otra indicación al planteamiento? ¿por qué? ¿con qué tema del curriculum vigente se relaciona?**	Identificar el conocimiento *fenomenológico* que emplea el profesor para construir la situación.
B.1.3. Observe la siguiente expresión algebraica y responda $\mathbf{6n-2(n-1)}$ ¿Cómo podría **relacionar esta expresión** con un **contenido** impartido en el **grado** que atiende?	En la respuesta dada a la pregunta usted respondió que puede que puede relacionarse con temas como suma y resta, antecesor y sucesor, conteo, etc **¿Podría explicar con más detalle cómo es que podría relacionarse la expresión algebraica con esos temas?**	Profundizar en los argumentos de conexión entre los temas señalados (abordados en primer grado) y una expresión algebraica a fin de reconocer si el profesor presenta conocimiento de las estructuras matemáticas.
C.1. Observe el siguiente bordado, lea su	En la respuesta dada a la pregunta usted menciona que	Identificar los argumentos para afirmar que la

descripción y responda las preguntas. *La siguiente imagen representa un* ***bordado de flores*** *formado con hexágono morado representando el centro de la flor y hexágonos amarillos alrededor como pétalos.*  ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?	sí es posible continuar con el bordado porque observa *"un patrón y entiende como sigue"*. **¿Podría decirme para usted qué es un patrón?**	secuencia sigue un patrón a fin de reconocer si el profesor conoce y usa adecuadamente la *definición* de patrón.
C.3. ¿Cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morado?	Usted responde ante esta pregunta existe una relación de proporcionalidad ¼ **¿Por qué considera que existe este tipo de relación? ¿para usted qué es una relación de proporcionalidad?** **¿Considera que una secuencia el patrón de crecimiento siempre está dado por una relación de proporcionalidad? ¿por qué?**	Aclarar qué es para el profesor una relación proporcional y de qué manera relaciona el patrón con este tipo de relación a fin de identificar si el conocimiento del profesor se encuentra asociado a las propiedades y fundamentos.
C.4.4. ¿Será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos?	Usted respondió que no es posible construir un bordado completo con 25 hexágonos amarillos, porque sigue una proporcionalidad y deben ser 26 hexágonos amarillos **¿cómo llega a esa conclusión?**	Profundizar el proceso que siguió para afirmar que se necesitan 26 hexágonos amarillos a fin de identificar el conocimiento sobre *procedimientos* que puso en acción.
E.1.1. ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones?	En la pregunta E.1. usted responde que el proceso de generalización se puede favorecer mediante actividades en las cuales	Profundizar en los argumentos por los cuales considera potenciales las actividades en las que se hagan inferencias a fin de confirmar el conocimiento

	deba hacer inferencias o razonamiento **¿Podría darme un ejemplo de dichas actividades? ¿Por qué considera que pueden ayudar a favorecer el proceso de generalización?**	de *formas de enseñanza* del profesor.

SESIÓN: GENERALIZACIÓN EN RELACIONES FUNCIONALES		
Actividad	Pregunta asociada	Intención
B.2. ¿Cómo favorecería el proceso de generalización en los estudiantes a partir de este tipo de experiencias?	Ante la pregunta B.2 usted responde que es posible favorecer el proceso de generalización en los estudiantes con experiencia como los patrones de sonido asignando consigas o actividades donde se identifiquen patrones de movimiento, forma o sonido. **¿Por qué considera que este tipo de actividades favorece el proceso de generalización?**	Recuperar el conocimiento que el profesor tiene sobre la potencialidad del uso de actividades con patrones musicales y gráficos.
C.2.6. ¿Cómo ayudaría a un estudiante de 1ero o 2do grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados?	Usted menciona que el uso de material concreto ayuda a los estudiantes a identificar la relación entre las variables de función **¿Cómo considera que apoya este tipo de material concreto a identificar dicha relación? ¿qué ventajas y limitaciones tiene su uso?**	Profundizar en la forma de uso que el profesor da al material concreto para la identificación de la relación entre las variables a fin de confirmar que conoce las potencialidades y limitaciones del uso de este material.
C.4.7. Construyan la expresión que les permita determinar la cantidad de globos dada una cantidad de invitados.	Usted construye la siguiente expresión algebraica “$3a + 1 = m$" para determinar la cantidad de globos dada una cantidad de invitados **¿Qué representa a y m en la expresión $3a + 1 = m$?**	Identificar la correcta relación entre las variables de la función en la expresión construía y el proceso que siguió el profesor para elaborarla a fin de identificar los conocimientos sobre las

	¿cómo obtuvo la expresión?	propiedades y sus fundamentos y de los procedimientos empleados.
C.5.3 ¿Cómo explicaría a los estudiantes el proceso de generalización existente en la relación funcional estudiada en la actividad?	Usted menciona que mediante dibujos, material concreto y tablas de variación proporcional podría explicar el proceso de generalización de la relación funcional expuesta en la actividad **¿De qué manera usaría estos recursos para mostrar la relación de las variables en la relación funcional?**	Recuperar la forma de uso que el profesor hace de recursos y materiales para explicar el proceso de generalización a fin de identificar el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas que pone en acción.

Anexo 7. Transcripción de entrevista semiestructurada, Mtr. Fernando.

Fecha: viernes 08 de marzo del 2024/06:00pm	
Parte 1 (00:00-25:45)	
1	*Se inicia saludando tanto el entrevistador como el entrevistado, se le pide autorización y consentimiento para grabar la entrevista.*
2	*Se inicia con la primera parte que corresponden a las preguntas sobre la primera parte del instrumento de recogida de dato "Generalización en patrones"*
3	*Entrevistador (E), Maestro Fernando (MF)*
4	**E:** Muy bien vamos a iniciar la entrevista. Vamos a revisar las respuestas dadas a algunas de las actividades abordadas en el taller "Docentes de 1er y 2do de primaria que desarrollan su proceso de generalización". La intención de esta entrevista es profundizar en las respuestas y argumentos dados en alguna de las actividades realizadas, por lo que a continuación me permitiré proyectar aquellas sobre las que se encuentra importante aclarar algunos aspectos.
5	Comenzamos con la primera parte con preguntas correspondiente a la sesión "Generalización en patrones".
6	Profundizando un poco en la respuesta dada a la primera pregunta de la actividad A; ¿qué es el pensamiento algebraico? Usted responde que es un tipo de pensamiento que ayuda a comprender procesos abstractos, lógicos y que implica el uso de símbolos y expresiones matemáticas y sus relaciones **¿qué papel juegan los símbolos y expresiones?**
7	**MF:** Para mí los símbolos son aquellas expresiones que me permiten representar de manera gráfica, simbólica, pictórica, alguna cantidad que no necesariamente se representa con un número específico sino con una letra que me ayuda a representar algo que desconozco. Las expresiones matemáticas las relaciono con las expresiones algebraica como "$a^2 + b^2 = c^2$" que se usan para interpretar un procedimiento o una situación y solucionar un problema.
8	**E:** Pasando a la pregunta A.2, usted plantea la siguiente actividad. *"Piensen en un número y luego le vamos a sumar 2 y después multiplicar el número que nos salió por tres"* **¿Cómo considera que su planteamiento le da sentido a la expresión $3(n + 2)$? ¿cómo se encuentran relacionados los datos?**
9	**MF:** Se parte de un valor que puede variar, cuando le pedimos a los estudiantes que piensen en un número, este puede ser cualquiera. Posteriormente se les pide

	que realicen las operaciones respetando lo que expresa la relación ya que primero se suman dos y después esto se multiplica por tres.
10	**E:** Continuando con el planteamiento diseñado **¿agregaría otra indicación al planteamiento? ¿por qué?**
11	**MF:** Releyendo el planteamiento me parece que lo dejaría cómo está, ya que considero que se usa un planteamiento comprensible para los estudiantes, es decir que pueden entender. En ese nivel es común que utilicemos este tipo de problemas "piensa en un número, súmale tanto, multiplícalo por tanto", por lo que son actividades que ellos pueden realizar sin mucha dificultad. Pienso que, aunque no se plantee como tal la expresión, al realizar dichas acciones se puede dar sentido a la expresión, si profundizamos un poco más con los estudiantes.
12	**E:** Ahora bien, **¿con qué tema del curriculum vigente se relaciona su planteamiento?**
13	**MF:** Lo podemos relacionar con aprendizaje, del programa de estudios anterior, correspondiente a "resolver problemas que implican hacer sumas y restas". O también con el aprendizaje "solucionar problemas que implican hacer multiplicaciones de un dígito".
14	**E:** Pasando a la actividad B, En la respuesta dada a la pregunta usted respondió que puede que puede relacionarse con temas como suma y resta, antecesor y sucesor, conteo, etc. **¿Podría explicar con más detalle cómo es que podría relacionarse la expresión algebraica con esos temas?**
15	**MF:** Sí, los estudiantes en este nivel trabajan colecciones, sucesiones numéricas, problemas adición, sustracción y multiplicación con un dígito. Considero que sin necesidad de que los estudiantes trabajen como tal la expresión algebraica podemos plantear situaciones en las que ellos analicen las relaciones que hay entre los datos para completar por ejemplo una sucesión o que realicen operaciones en las cuales ellos analicen cómo se relacionan los números con los que están operando.
16	**E:** Pasando a la actividad C, en la respuesta dada actividad C.1. "¿usted menciona que sí es posible continuar con el bordado porque observa *"un patrón y entiende como sigue"*. **¿Podría decirme para usted qué es un patrón? ¿y qué importancia tiene la identificación del patrón?**

17	**MF:** Es un conjunto de elementos que se encuentran organizados y se repiten para formar una secuencia.
18	Identificar el patrón me permitió analizar las características de la primera flor y hacer este proceso de pensamiento para determinar qué elementos siguen para construir la siguiente. Me permite a partir de la visualización construir la secuencia.
19	**E:** Muchas gracias. Bueno más adelante, en esta misma actividad cuando se plantea la pregunta ¿cómo aumenta el número de hexágonos amarillos al incrementar la cantidad de hexágonos morado? usted menciona que existe una relación de proporcionalidad ¼ **¿por qué considera que existe este tipo de relación? ¿para usted qué es una relación de proporcionalidad?**
20	**MF:** Porque vi que a un hexágono morado le corresponde 6 pétalos amarillos. Pero a partir del segundo hexágono morado vi que en realidad se aumentaban 4 hexágonos amarillos. Entonces observé una relación que es proporcional porque se van agregando de 4 en 4. Así lo represente 1 a 4, es decir por cada hexágono morado se agregan 4 amarillos. Para mí la proporcionalidad es el aumento regular en una relación.
21	**E:** En este mismo sentido **¿considera que una secuencia el patrón de crecimiento siempre está dado por una relación de proporcionalidad? ¿por qué?**
22	**MF:** Diría que no, creo que sí hay un crecimiento regular pero que no necesariamente tiene que ser proporcional.
23	E: Pasando a la pregunta C.4.4. ¿Será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? Usted respondió que no es posible construir un bordado completo con 25 hexágonos amarillos, porque sigue una proporcionalidad y deben ser 26 hexágonos amarillos **¿cómo llega a esa conclusión?**
24	**MF:** Lo que hice cómo lo hacen los niños o cómo incluso nosotros lo enseñamos, hice cómo una tablita donde se plasmó la relación de correspondencia y fui sumando la relación entre un hexágono morado y la cantidad de hexágonos amarillos, es decir de 4 en 4 hasta llegar a la cantidad que nos pedía. Me apoyé un poco en el procedimiento que seguí para responder la actividad C.3.
25	**E:** Pasando a la actividad E, en la pregunta ¿Cómo podría favorecer, en mis estudiantes, el desarrollo del proceso de generalización a través de los patrones? usted responde que el proceso de generalización se puede favorecer mediante actividades en las cuales deba hacer inferencias o razonamiento. **¿Podría darme un ejemplo de dichas actividades? ¿por qué considera que pueden ayudar a favorecer el proceso de generalización?**

26	**MF:** Por ejemplo, pienso que cuando trabajamos el tangram o un rompecabezas, le pedimos al chico que observe los elementos que conforman una secuencia o la regularidad que sigue para poder continuar con ésta. Cuando usamos el tangram el chico primero tiene que observar los elementos, tiene que saber cómo colocarlos, si siguen una lógica si no la siguen. De esta manera los estudiantes tienen que encontrar la relación que hay entre los elementos, para que puedan hacer inferencias sobre el comportamiento de dicha relación.
27	El uso de materiales que puedan ver y manipular permiten que los estudiantes identifiquen las regularidades y la usen para seguir una secuencia. Por la etapa de desarrollo cognitivo en la que se encuentran el uso de estos materiales apoya en la identificación de patrones, ya que los pueden observar, así las formas, los colores ayudan a ver qué es lo que se repite y a usar esa regularidad en la construcción de arreglos o secuencias. Es importante qué como docentes aprovechemos dichos materiales y planteemos consignas que permitan que los estudiantes identifiquen las relaciones y las usen para generalizar.
Parte 2 (25:46-43:10)	
28	*Se continua con la siguiente parte que corresponden a las preguntas sobre la segunda parte del instrumento de recogida de dato "Generalización en relaciones funcionales"*
29	*Se explica al entrevistado que ahora se revisaran algunas respuestas dadas a las actividades correspondientes a la generalización en relaciones funcionales, siguiendo una dinámica similar a la realizada en la primera parte*
30	**E:** En actividad B de la segunda parte "Generalización en relaciones funcionales" ante la pregunta B.2 usted responde que es posible favorecer el proceso de generalización en los estudiantes con experiencia como los patrones de sonido asignando consigas o actividades donde se identifiquen patrones de movimiento, forma o sonido. **¿Por qué considera que este tipo de actividades favorece el proceso de generalización?**
31	**MF:** Los estudiantes en esta etapa de desarrollo cognitivo la experiencia con actividades de movimiento, de visualización y sonidos puede favorecer la identificación de un patrón o de la repetición, lo que le permite seguir con una secuencia. Esa repetición permite que los estudiantes generalicen.
32	**E:** Pasando a la actividad C, en la pregunta ¿cómo ayudaría a un estudiante de 1ero o 2do grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados? usted menciona que el uso de material concreto ayuda a los estudiantes a identificar la relación entre las variables de función

	¿Cómo considera que apoya este tipo de material concreto a identificar dicha relación? ¿qué ventajas y limitaciones tiene su uso?
33	**MF:** Menciono el uso de material concreto porque en esta etapa de desarrollo cognitivo la manipulación es muy importante, por lo que puede ser más sencillo para el estudiante identificar la relación que existe entre los datos si de alguna manera puede manipular los mismos. Por ejemplo, si a cada niño se le da una misma cantidad de globos, y se tiene que 3 niños tienen 12 globos, cuando se les da el material para que interpreten esta situación al repartir pueden observar cómo están relacionado los datos. Después que comprenden la relación se puede quitar el material y los estudiantes pueden encontrar la cantidad de globos que tendrán 7 u 8 niños. Es importante que el material sea un apoyo y que cuando el estudiante encuentre la relación se puede hacer sin el uso de éste para transitar a un pensamiento cada vez más abstracto.
34	**E:** Por su parte, usted construye la siguiente expresión algebraica "$3a + 1 = m$" para determinar la cantidad de globos dada una cantidad de invitados **¿Qué representa a y m en la expresión $3a + 1 = m$? ¿cómo obtuvo la expresión?**
35	**MF:** La letra "a" corresponde a la cantidad de invitados, mientras que "m" serían los globos totales. Para poder construir la expresión usé la relación que encontré con la actividad C.1., donde identifiqué que a cada invitado se le darán 3 globos y se tiene que sumar 1 que es el que va en la puerta para obtener los globos totales.
36	**E:** Finalmente, en la pregunta ¿cómo explicaría a los estudiantes el proceso de generalización existente en la relación funcional estudiada en la actividad? Usted menciona que mediante dibujos, material concreto y tablas de variación proporcional. **¿De qué manera usaría estos recursos para mostrar la relación de las variables en la relación funcional?**
37	**MF:** Muy bien, pues para que los alumnos comprendan el proceso de generalización en una relación funcional se puede hacer uso, como mencioné anteriormente, del material concreto porque los estudiantes pueden manipular y visualizar cómo se comportan los datos, también permite que comprueben hipótesis que pueden plantearse. Las tablas también pueden apoyar, porque en ahí se registran los datos y también se puede visualizar el comportamiento de los números.
38	**E:** Pues esto sería todo, le agradezco su tiempo y disposición para llevar a cabo esta reunión y poder profundizar sobre las actividades realizadas en el taller.

Anexo 8. Guión de entrevista semiestructurada, Mtra. Julieta.

SESIÓN: GENERALIZACIÓN EN PATRONES		
Actividad	Pregunta asociada	Intención
A.2. Diseñe una actividad, de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $\mathbf{3(n+2)}$; sin usar símbolos algebraicos.	En la actividad A.2., usted realiza unos dibujos **¿podría explicarme por qué realizó dichos dibujos y cómo le ayudó a diseñar la actividad?**	Identificar el uso del registro de representación pictórico para comprender una expresión algebraica.
C.1. Observe el siguiente bordado, lea su descripción y responda las preguntas. *La siguiente imagen representa un **bordado de flores** formado con hexágono morado representando el centro de la flor y hexágonos amarillos alrededor como pétalos.*  ¿Puedo continuar el bordado? ¿Por qué?	En la respuesta dada a la pregunta usted menciona que sí es posible continuar con el bordado porque observa "un patrón y entiende como sigue". **¿Podría decirme para usted qué es un patrón? ¿Y cómo es que el patrón le ayuda a seguir con el bordado?**	Identificar los argumentos para afirmar que la secuencia sigue un patrón a fin de reconocer si la profesora conoce y usa adecuadamente la definición de patrón. Identificar si la profesora reconoce el papel de tomar conciencia de una propiedad común (KPM).
C.4.4. Siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿a qué se debe?	Usted responde que no, porque quedaría incompleto. **¿Cómo sabe que quedaría incompleto? ¿qué proceso realiza para llegar a esa conclusión?**	Identificar la estrategia utilizada para llevar a cabo la inversión del proceso de generalización a fin de identificar los conocimientos de procedimientos o prácticas ligadas a una temática en común que acciona.
C.4.5. Si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados ¿es posible generar una expresión que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría?	Usted afirma que la expresión $2+4n$ ayuda a encontrar la cantidad de hexágonos amarillos si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados	Profundizar el proceso que siguió para construir la expresión algebraica a fin de identificar mayores elementos de los conocimientos de

	¿Por qué? ¿cómo llega a esa conclusión? ¿de qué aspectos se apoya para generar dicha expresión?	procedimientos que pone en acción la profesora.

SESIÓN: GENERALIZACIÓN EN RELACIONES FUNCIONALES		
Actividad	Pregunta asociada	Intención
C.2.6. ¿Cómo ayudaría a un estudiante de 1ero o 2do grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados?	Usted menciona que el uso de dibujos o material concreto ayuda a los estudiantes a identificar la relación entre las variables de función **¿Cómo considera que estos recursos y materiales apoyan a identificar dicha relación? ¿qué ventajas y limitaciones tiene su uso?**	Profundizar en la forma de uso que la profesora da al material concreto y los dibujos para la identificación de la relación entre las variables a fin de confirmar que conoce las potencialidades y limitaciones del uso de este material.
C.4.5. ¿Es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan $Z + Z + Z$ globos"? ¿Por qué?	Usted responde que no, porque falta uno de la puerta (aunque sí podríamos calcular así los globos) **¿A qué se refiere con que falta uno de la puerta? ¿y por qué menciona que sí podría calcular así los globos?**	Identificar si extiende el patrón identificado en las actividades anteriores para evaluar la expresión algebraica
C.5.3 ¿Cómo puede apoyar la actividad realizada en este apartado al desarrollo del proceso de generalización?	Usted menciona que la actividad analizada puede apoyar en el proceso de generalización "en su pensamiento matemático los niños podrían calcular más posibilidades de 'invitados' pero también se podrían plantear problemas similares" **¿Podría explicar con más detalle a qué se refiere con plantear problemas similares y cómo esto puede ayudar al desarrollo**	Aclarar el uso de "problemas similares" en el desarrollo del proceso de generalización a fin de identificar el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas que pone en acción la profesora.

	de su proceso de generalización?	
F. Observe la siguiente expresión: $\mathbf{3(n+2)}$ Diseñe una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes.	En el diseño de actividad, usted con contempla el uso de materiales concreto como el uso de dinero. **¿Por qué considera importante el uso de estos materiales en su diseño?**	Identificar el conocimiento que la profesora tiene sobre la potencialidad que tiene en la enseñanza del proceso de generalización el uso de materiales concretos.

Anexo 9. Transcripción de entrevista semiestructurada, Mtra. Julieta.

Fecha: viernes 15 de marzo del 2024/06:00pm	
Parte 1 (00:00-18:15)	
1	*Se inicia saludando tanto el entrevistador como el entrevistado, se le pide autorización y consentimiento para grabar la entrevista.*
2	*Se inicia con la primera parte que corresponden a las preguntas sobre la primera parte del instrumento de recogida de dato "Generalización en patrones"*
3	*Entrevistador (E), Maestra Julieta (MJ)*
4	**E:** Muy bien vamos a iniciar la entrevista. Vamos a revisar las respuestas dadas a algunas de las actividades abordadas en el taller "Docentes de 1er y 2do de primaria que desarrollan su proceso de generalización". La intención de esta entrevista es profundizar en las respuestas y argumentos dados en alguna de las actividades realizadas, por lo que a continuación me permitiré proyectar aquellas sobre las que se encuentra importante aclarar algunos aspectos.
5	Comenzamos con la primera parte con preguntas correspondiente a la sesión "Generalización en patrones".
6	**E:** Retomando la actividad A. En el apartado A.2., se les pide diseñar una actividad de acuerdo con el nivel que atiende, que se ajuste a la siguiente expresión $\mathbf{3(n+2)}$; sin usar símbolos algebraicos. Usted realiza unos dibujos, **¿podría explicarme por qué realizó dichos dibujos y cómo le ayudó a diseñar la actividad?**
7	**MJ:** Empleé los dibujos para dar sentido a la expresión, le asigné un valor a n, en este caso 1 y lo sustituí en la expresión algebraica para resolverla y comprenderla. Los dibujos los realicé para ilustrar las operaciones que había hecho, en este caso son 3 grupos formados por 2 manzanas más 1 manzana que es el valor que asigné a n. Los dibujos también me permitieron comprender la expresión y la situación que planteé para darle sentido.
8	**E:** Pasando a la actividad C. En la consigna C.2.2 se les pregunta si es posible continuar con el bordado presentado en la actividad y por qué. Usted responde que sí porque observa un patrón y entiende lo que sigue. **¿Podría decirme para usted qué es un patrón? ¿Y cómo es que el patrón le ayuda a seguir con el bordado?**
9	**MA:** Para mí el patrón es aquello que se repite.
10	**MA:** Y me ayudó a seguir con el bordado porqué identifiqué cuántos hexágonos amarillos aumentan cuando se añade uno morado. Así pude seguir dibujando la secuencia, porque sabía lo que seguía.

11	**E:** Continuando con la misma actividad, en la pregunta C.4.4., se cuestiona que siguiendo el patrón identificado ¿será posible construir un bordado con 25 hexágonos amarillos? ¿a qué se debe? Usted responde que no, porque quedaría incompleto. **¿Cómo sabe que quedaría incompleto? ¿qué proceso realiza para llegar a esa conclusión?**
12	**MJ:** Lo que hice fue recuperar el patrón que es un aumento de 4 en 4 más dos hexágonos iniciales. Busqué un número que multiplicado por 4 y aumentado en 2 le de 25, pero no hay ningún número que satisfaga esta relación, por lo que el bordado quedaría incompleto.
13	**E:** Continuando con la misma actividad, en la pregunta **C.4.5.** se cuestiona que si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados ¿es posible generar una expresión que me ayude a construir el bordado? ¿cómo lo haría? Usted afirma que la expresión $2 + 4n$ ayuda a encontrar la cantidad de hexágonos amarillos si estoy pensando en una cantidad de hexágonos morados **¿Por qué? ¿cómo llega a esa conclusión? ¿de qué aspectos se apoya para generar dicha expresión?**
14	**MJ:** Otra vez retomo el patrón, ya que identifiqué en las actividades anteriores que el aumento es de 4 en 4, pero siempre se debe sumar 2 de inicio, que son los hexágonos que quedan fuera del conjunto de 4 en 4 en la primera flor.
Parte 2 (18:16-35:05)	
15	*Se continua con la siguiente parte que corresponden a las preguntas sobre la segunda parte del instrumento de recogida de dato “Generalización en relaciones funcionales”*
16	*Se explica al entrevistado que ahora se revisaran algunas respuestas dadas a las actividades correspondientes a la generalización en relaciones funcionales, siguiendo una dinámica similar a la realizada en la primera parte*
17	*Se indica que se revisará la actividad C. Y se lee el planteamiento principal de esta actividad.* *“En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños”.*
18	**E:** En la actividad C.2.6 se pregunta ¿cómo ayudaría a un estudiante de 1er o 2do grado a identificar la relación entre el número de globos y el número de invitados? Usted responde que una forma de ayudar es con dibujos o dando los “globos” para que ellos los repartan.

	¿Cómo considera que estos recursos y materiales apoyan a identificar dicha relación? ¿qué ventajas y limitaciones tiene su uso?
19	**MJ:** Pues considero que usar este tipo de materiales les permite a los estudiantes ver qué es lo que sucede, es decir si se les da una cantidad de globos y una cantidad de invitados ellos pueden repartir de uno en uno los globos, colocando siempre el de la puerta y de esa forma determinar cuántos le tocan a cada invitado. Pueden ver cómo es la relación, porque identificarían cuántos globos le tocan por invitado.
20	**MJ:** Creo que como los estudiantes son muy pequeños el manipular los materiales les ayuda a comprender cómo se relacionan los datos. Pero también es importante no quedarse solo con el material, es decir el material ayuda a comprender, pero una vez que los estudiantes ven la relación, considero que es importante retirarlo para que con la información que ellos tienen puedan desarrollar otras estrategias, como hacer operaciones y también estudiar la relación que hay en esas operaciones que realiza. Es decir, el material concreto es un apoyo, pero el análisis de las situaciones no debe girar siempre en torno al material concreto únicamente.
21	**E:** En la pregunta C.4.5. se cuestiona sobre si ¿es correcta la afirmación "cuando hay Z invitados, se necesitan $Z + Z + Z$ globos"? ¿por qué? Usted responde que no, porque falta uno de la puerta (aunque sí podríamos calcular así los globos) **¿A qué se refiere con que falta uno de la puerta? ¿y por qué menciona que sí podría calcular así los globos?**
22	**MJ:** Sí, con las actividades anteriores identifiqué que a cada invitado le tocan tres globos, entonces sí hay Z invitados habrá el triple de Z, que puede ser $Z + Z + Z$ pero siempre hay uno que se coloca en la puerta, por eso falta sumar uno a esa operación. Yo puse que sí se podría calcular porque pues a esa suma solo se tiene que agregar el globo de la puerta.
23	**E:** Pero, entonces ¿estaría bien la expresión, así como se plantea?
24	**MJ: Pues no, sería** $Z + Z + Z + 1$ ó $3z + 1$
25	**E:** En la pregunta C.5.3 se cuestiona sobre ¿Cómo puede apoyar la actividad realizada en este apartado al desarrollo del proceso de generalización? Usted menciona que la actividad analizada puede apoyar en el proceso de generalización "en su pensamiento matemático los niños podrían calcular más posibilidades de 'invitados' pero también se podrían plantear problemas similares" **¿Podría explicar con más detalle a qué se refiere con plantear problemas similares y cómo esto puede ayudar al desarrollo de su proceso de generalización?**
26	**MJ:** Me refiero a que ellos planteen problemas donde haya una relación de correspondencia entre los datos, como el caso de que el número de globos dependía del número de invitados. Considero que cuando los estudiantes tienen experiencia analizando y resolviendo este tipo de problemas, después ellos pueden

	plantear los propios y resolverlos con sus compañeros. Esto también es una forma de evaluar la comprensión, pues al revisar sus planteamientos podemos identificar si los datos del problema guardan una correspondencia. El que ellos mismos planteen situaciones también apoya porque usan ejemplos y lenguaje cercano a sus compañeros, entonces podrían comprender mejor las situaciones.
27	**E:** ¿A qué se refiere cuando menciona que los “datos guarden correspondencia”
28	**MJ:** Ah, pues, así como los globos guardan correspondencia con el número de invitados, que depende del número de invitados será el número de globos que se necesiten.
29	**E:** Finalmente, en la actividad F, se pide diseñar una situación del mundo real, de acuerdo con el grado escolar que imparten, que se ajuste a la relación $\boldsymbol{3(n+2)}$ y favorezca el proceso de generalización de los estudiantes. En el diseño de actividad, usted con contempla el uso de materiales concreto como el uso de dinero. **¿Por qué considera importante el uso de estos materiales en su diseño?**
30	**MJ:** Yo lo consideré porque de acuerdo con mi experiencia, el uso de materiales que los estudiantes puedan manipular ayuda a comprender situaciones y contextos. En este caso, si se les dan monedas con el valor de los productos se pueden usar para calcular cuánto se pagará dependiendo del producto que elijan, también podrán observar lo que cambia, lo que se mantiene y cómo es la relación entre estos. Aquí no solo es el material, sino el acompañamiento que el docente le da a los estudiantes para que vayan observando cómo se relacionan el total a pagar por los productos que elijan, observando que siempre son tres personas que eligen lo mismo y un dulce de dos pesos.
31	**E:** Pues esto sería todo, le agradezco su tiempo y disposición para llevar a cabo esta reunión y poder profundizar sobre las actividades realizadas en el taller.