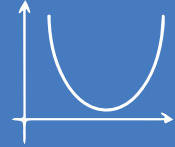
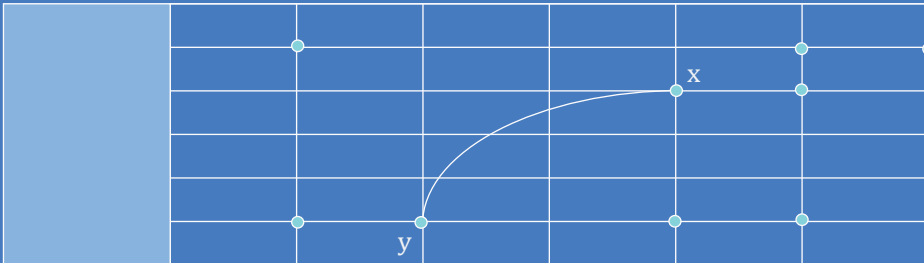
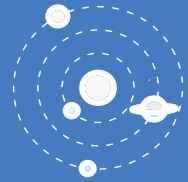


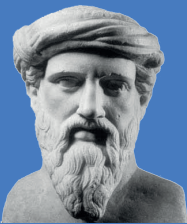
$\varphi$



# Unidad Académica de Matemáticas a 40 años de su fundación



$$\partial t = D\Delta\varphi.$$
$$\partial\varphi$$
$$d\varphi v$$
$$dt = \sum_{\in V} u$$
$$2$$



Nancy Janeth Calvillo Guevara, **Mónica del Rocío Torres Ibarra**, Elvira Borjón Robles, **Plácido Hernández Sánchez**, Luz Vanessa Bacio Parra, **Leticia Sosa Guerrero**, Rebeca Valdes Hibel, **Irma Margarita Rodríguez Flores**, Luis Enrique Adame Martínez, **Juan Martínez Ortiz**, Leticia Adriana Ramírez Hernández, **Mayra Guadalupe García Reyna**, Jesús Adrián López, **Arturo Araujo Conejo**, Andrea Arlette España Tinajero, **Ricardo David Valdez Cepeda**, José Manuel Gómez Soto, **Juan Antonio Pérez**, Miguel A. Maldonado Aguilar, **Oscar Germán Robles Torres**, Ofelia Montelongo Aguilar, **Darly Alina Kú Euán**.

$\partial$	$\Delta$
$2$	$\Sigma$

**Lorena Jiménez  
Sandoval**  
Coordinadora





Unidad Académica de Matemáticas a  
40 años de su fundación

Primera edición: 2025

Unidad Académica de Matemáticas a  
40 años de su fundación

D.R. © Lorena Jiménez Sandoval

Diseño Editorial: Antonio Perales Veyna  
Portada: Antonio Perales Veyna  
Corrección de estilo: Evelyn del Río Ortiz

D.R. © Universidad Autónoma de Zacatecas  
"Francisco García Salinas"  
Torre de Rectoría 3er Piso Campus UAZ  
Siglo XXI Carretera Zacatecas-Guadalajara  
km 6, Col. Ejido la Escondida  
C.P 98000 Zacatecas, Zac.  
investigaciónyposgrado@uaz.edu.mx

ISBN: 978- 607- 555- 305- 4 UAZ

La presente publicación pasó por el proceso de revisión de pares ciegos,  
bajo los criterios editoriales establecidos por parte del Programa Editorial  
de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Esta publicación no puede ser reproducida, ni en todo ni en parte, ni registrada  
o transmitida, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma  
y por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico,  
por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo y por escrito de los editores.

Unidad Académica de Matemáticas a  
40 años de su fundación

Coordinadora  
Dra. Lorena Jiménez Sandoval





# Índice

LA FUNDACIÓN DEL CENTRO DE MATEMÁTICAS.....	9
LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS EN EL ESTADO DE ZACATECAS.....	15
MIIMAZ: HISTORIA DE UNA IDEA.....	39
LA MEJOR DECISIÓN PARA MI VIDA PROFESIONAL.....	79
MI EXPERIENCIA ACADÉMICA POR LA UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS .....	81
¿ES BUENA IDEA ESTUDIAR MATEMÁTICAS?.....	91
MATEMÁTICA APLICADA Y MATEMÁTICAS, EL MULTIFACÉTICO MODELO DE GOMPERTZ.....	97
FRACTALES QUE CAMINAN SOBRE FRACTALES.....	107
ANÁLISIS DE BASES DE DATOS COMPOSICIONALES.....	133
COMPUTACIÓN UNIVERSAL CON AUTÓMATAS CELULARES BINARIOS EN 2 DIMENSIONES.....	139
LA MATEMÁTICA DE LA PROXIMIDAD.....	153
UNA INVITACIÓN A LA HOMOLOGÍA SIMPLICIAL.....	177
EL DISEÑO DE MEMES MATEMÁTICOS COMO MOVILIZADOR DE CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS.....	191
CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE CONCEPTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL EN EL NIVEL SUPERIOR.....	209
LAS ENTREVISTAS Y GRUPOS FOCALES DE DOCENTES Y ESTUDIANTES DE LA UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS EN EL MARCO DE INVESTIGACIONES DE MATEMÁTICA EDUCATIVA.....	225



# CAPÍTULO 1: NARRATIVAS



## La fundación del Centro de Matemáticas

*Gustavo de la Rosa Muruato*

Fue en el verano de 1982. Javier Enríquez invitó personalmente a varios profesores de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) para asistir a un curso de matemáticas en la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Durante un evento internacional en matemáticas, Javier Enríquez y Octavio Escobar conocieron a Efrén Marmolejo y a otros docentes de la Maestría en Matemática Educativa de la UAGro. El curso al que nos invitaban sería impartido por Víctor Espino, un español de las Islas Canarias, candidato a Doctor por la Universidad de Nuevo México, Estados Unidos. Fuimos cinco los asistentes: Javier Burnes Ortíz, Octavio Escobar Medina, Juan Antonio Pérez, Javier Enríquez Félix y Gustavo de la Rosa Muruato. El curso se desarrolló, en la ciudad de Chilpancingo, durante los meses de julio y agosto.

Nos fuimos de Zacatecas en el coche de Javier Burnes; un automóvil grande y espacioso, con un potente motor que nos hacía sentir seguros. Cuando ya íbamos por la carretera, Javier encendió la radio. En la estación sintonizada escuchamos unos versos que nos parecieron de buen augurio: «por los caminos del sur / vámonos para Guerrero...» (clásica de José Agustín Ramírez Altamirano y en versión del Duetto Caleta). Desde ese momento, cada vez que decaía la conversación o entraba en punto muerto, Javier y yo empezábamos: «por los caminos del sur...».

Con nuestros propios recursos pagamos nuestra estancia en la ciudad de Chilpancingo. Trabajábamos todo el día. Algunos alimentos los tomábamos en casa de Efrén Marmolejo, disfrutando la cordialidad de su familia y la deliciosa gastronomía local. Después nos íbamos a la maestría. Víctor nos daba clases una o dos horas y luego trabajábamos por nuestra cuenta el resto de la mañana y toda la tarde.

Debo decir que las clases de Víctor Espino eran de una calidad superior que no he vuelto a encontrar ni he sido capaz de reproducir. Estudiamos los primeros capítulos del “Tomo I” del Calculus de Tom M. Apostol. Víctor nos exponía el tema de manera cualitativa y, posteriormente, nosotros hacíamos todos los cálculos teóricos. Eran conferencias en verdad magistrales, con apenas algunos símbolos matemáticos. La claridad de las ideas, de los teoremas y sus demostraciones era asombrosa, sugerente y persuasiva y de una calidad pedagógica difícil de superar. Enseguida nosotros debíamos ejecutar todas las operaciones técnicas, explicitando hasta el mínimo detalle de las demostraciones con el más riguroso simbolismo matemático. Después debíamos resolver algunos problemas escogidos. Para el final del curso habíamos resuelto todos los problemas propuestos en los capítulos que fueron el objeto de éste. Yo me di cuenta que, hasta ese curso esclarecedor, no sabía matemáticas, a pesar de estar considerado –al igual que todos mis compañeros– un buen profesor de matemáticas.

El entusiasmo que nos impulsaba nos hacía soportar las precarias condiciones materiales de nuestra estancia. La universidad nos permitía dormir en un austero barracón con literas. Por eso preferíamos pasar el día en las modernas y muy funcionales instalaciones de la Maestría en Matemática Educativa. Entre nosotros el ambiente era de camaradería, de cooperación, con mucho buen humor y bromas que estimulaban lo mejor de nuestra convivencia.



Faltaba llevar la propuesta a la Rectoría de la UAZ. Entre todos decidimos que yo regresaría a Zacatecas y abogarí por nuestra idea ante las autoridades académicas. Obsérvese que, en esa época, las vacaciones de la universidad comprendían los meses de julio y agosto. Para nuestra buena suerte, y fortuna de la UAZ, Francisco García González se desempeñaba como director general de Servicios Académicos. García González era y sigue siendo un entusiasta de los proyectos novedosos, su huella está en varios proyectos universitarios exitosos. En fin, García González accedió a entrevistarse conmigo. Una tarde de julio nos encontramos en el café de la librería “Don Quijote”; establecimiento que aún existe en la calle Fernando Villalpando. El proyecto le gustó y me comentó que, justamente, en la UAZ estaba Tadeusz Iwinski, un matemático educativo polaco y que él podría apoyar para lograr un proyecto más en forma. Con la deliciosa informalidad de la época, no nos hundimos en el papeleo: ni me firmó de recibido ni yo se lo pedí. La mejor parte de la cultura de los setenta seguía viva en nosotros.



**Imagen 2.** Convocatoria para la ocupación de 5 plazas para el Centro de Matemáticas (cortesía de Gustavo de la Rosa Muruato).

Después de cumplir varios encargos de mis compañeros, regresé muy contento a Chilpancingo. Ese fin de semana nos dimos una escapada a las playas de Acapulco. Les recuerdo que no disfrutábamos de ningún apoyo institucional por parte de la UAZ. En el transcurso del mes de julio y agosto, con aportaciones importantes e instrucciones precisas de Francisco García González, él y Tadeusz Iwinski redactaron el proyecto institucional para la creación del Centro de Matemáticas. En paralelo, Javier Enríquez también promovió la propuesta ante la administración central. A fines de agosto conocimos el proyecto, presentado a nombre de la Dirección General de Servicios Académicos, y todos estuvimos de acuerdo.

El tres de septiembre de 1982 se convocó a ocupar cinco plazas de profesor-investigador de medio tiempo en el Centro de Matemáticas (Imagen 2). Los exámenes se verificaron el viernes 17 de septiembre de 1982 en la casa número 8 de Ingeniería, ya designadas instalaciones oficiales. Una vez aprobados los exámenes y con los nombramientos correspondientes, el Rector Jorge Eduardo Hiriart Estrada lo inauguró y comenzaron los trabajos del Centro de Matemáticas –el 18 de septiembre de 1981– adscrito a la Dirección General de Servicios Académicos y siendo el primer coordinador provisional Tadeusz Iwinski (Imagen 3).



*Imagen 3. Inauguración del Centro de Matemáticas. 18 de septiembre de 1982  
(cortesía de Judith Hernández Sánchez).*

En conclusión: el Centro de Matemáticas fue el resultado de una virtuosa conjunción de circunstancias, de jovialidades efervescentes, de voluntades bien concertadas y algo de audacia en sincrónica armonía. De manera incuestionable, los creadores y fundadores del Centro de Matemáticas son, en estricto desorden alfabético: Javier Enríquez Félix, Octavio Escobar Medina, Juan Antonio Pérez, Javier Burnes Ortíz, Gustavo de la Rosa Muruato, Francisco García González y Tadeusz Iwinski.

Por los caminos del sur..

### **Sobre el autor**

M. en C. Gustavo de la Rosa Muruato

Docente investigador jubilado de la Unidad Académica de Matemáticas.

# **La Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el Estado de Zacatecas**

*Nancy Janeth Calvillo Guevara  
Mónica del Rocío Torres Ibarra  
Elvira Borjón Robles  
Plácido Hernández Sánchez  
Luz Vanessa Bacio Parra  
Leticia Sosa Guerrero*

## **Resumen**

En este escrito se comparte información sobre algunas de las generaciones de olímpicos y delegados del estado de Zacatecas, desde la fundación de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas hasta la actualidad. También se presentan estadísticas de la participación de la delegación zacatecana en los concursos nacionales, como: puntuación, lugar en el ranking por estados y las medallas o reconocimientos obtenidos.

*Palabras clave:* Olímpicos, delegados, puntuación, ranking, Zacatecas.

## **Desarrollo**

La Olimpiada de Matemáticas en el estado de Zacatecas es un proyecto de vinculación de la Unidad Académica de la UAZ, cuyos propósitos son: primero, dar a conocer y desarrollar un tipo de matemáticas distinto al

que se imparte en la mayoría de las instituciones educativas, con problemas que despierten el interés de los estudiantes y les planteen un desafío intelectual y segundo, detectar jóvenes con talento matemático, que más adelante contribuirán a desarrollar la actividad científica en nuestro estado, esto a través de la organización de la Etapa Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM).

La OMM es un programa de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), cuya parte central es la realización del Concurso Nacional para estudiantes preuniversitarios. Este concurso es el más importante en nuestro país a nivel bachillerato, así como la Olimpiada Internacional de Matemáticas lo es a nivel mundial. El objetivo de la OMM es promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, alejándose del estudio tradicional, que promueve la memorización y mecanización, y buscando desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes (Olimpiada Mexicana de Matemáticas [OMM], s.f.-a).

Desde el año de 1987 la SMM organiza el concurso nacional (Morelos, Londoño y Salazar, 2016, p. 149), cabe señalar que el estado de Zacatecas ha participado desde la primera edición de esta contienda. Actualmente, la convocatoria de la OMM en nuestro estado se publica la segunda quincena del mes de febrero de cada año, ésta se compone de cuatro fases: Escolar, Regional, Estatal y Entrenamientos. De estas fases se eligen a los representantes que participan en la Olimpiada Regional de Occidente (entre 6 y 14 participantes) y en el Concurso Nacional de la OMM (sólo 6 participantes), que se realizan en los meses de octubre y noviembre, respectivamente.

A partir del Concurso Nacional, el comité nacional prepara y elige a los estudiantes que representan a nuestro país en diferentes competencias internacionales, como la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), la Iberoamericana, la Centroamericana y del Caribe, la de la Cuenca del Pacífico, la Europea Femenil de Matemáticas, entre otras (OMM, s.f.-a).

Se considera que el esfuerzo de un gran número de personas que han trabajado para la olimpiada a lo largo de los años se ha visto recompensado, sobre todo, en el impacto en el ambiente educativo de nuestro país, ya que varios profesores y alumnos, que se han acercado en algún

momento a las Olimpiadas, han creado talleres de resolución de problemas de matemáticas, en los cuales han vertido sus experiencias (OMM, s.f.-a). Por otro lado, la Unidad Académica de Matemáticas ha recibido el fruto de su apoyo con el ingreso de alumnos que cuentan con una excelente formación matemática, la cual han obtenido gracias a sus experiencias durante los intercambios y entrenamientos que les ha ofrecido el entrenamiento y participación en la Olimpiada.

A continuación, en la Tabla 1 se presentan los nombres de los delegados del estado de Zacatecas. Cabe señalar que se presentan dos columnas de delegados: una, en la que se presentan los Delegados Estatales, ésta alude a los profesores que se encargan tanto de la organización del concurso en su etapa estatal, como de la gestión de recursos para las etapas estatal y nacional. En la otra se muestran los delegados para los concursos nacionales, es decir, los profesores o entrenadores que están al frente de las delegaciones en dicho concurso, realizando tareas académicas, como la revisión de los exámenes, y la defensa de puntos frente a los comités designados para ello, y también se encargan de vigilar la buena conducta de la delegación y del ejercicio y la comprobación de recursos, en caso de ser necesario. En esta columna algunas celdas se encuentran vacías debido a que no se tienen los datos.

**Tabla 1. Delegados Estatales y Nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas del estado de Zacatecas**

OMM (Año)	Sede	Delegad@s Estatales (Codelegad@s)	Delegad@s Concurso Nacional (Codelegad@s)
36 (2022)	Oaxtepec, Morelos	Nancy Janeth Calvillo Guevara (Plácido Hernández Sánchez)	Eduardo Rosales López (Ana Teresa Calderón Juárez)
35 (2021)	Virtual, Zacatecas		Eduardo Rosales López (Juan Eduardo Castanedo Hernández)
34 (2020)	Virtual, Zacatecas		Juan Eduardo Castanedo Hernández (Eduardo Rosales López)
33 (2019)	Ciudad de México		Juan Eduardo Castanedo Hernández (Eduardo Rosales López, Noé Muñoz Elizondo)
32 (2018)	Campeche, Camp.		Fernando Ibarra Tejeda (Juan Eduardo Castanedo Hernández)
31 (2017)	Santiago, Nuevo León		Fernando Ibarra Tejeda (Adrián de Jesús Celestino Rodríguez)
30 (2016)	Acapulco, Gro.		Nancy Janeth Calvillo Guevara (Luis Manuel Rodarte Solórzano)
29 (2015)	Guadalajara, Jal.	Nancy Janeth Calvillo Guevara (Claudia Angélica Robles Domínguez)	Nancy Janeth Calvillo Guevara (Adrián de Jesús Celestino Rodríguez)
28 (2014)	Toluca, Estado de México		Nancy Janeth Calvillo Guevara (Fernando Ibarra Tejeda)
27 (2013)	Huasca de Ocampo, Hidalgo	Nancy Janeth Calvillo Guevara (Claudia Angélica Robles Domínguez)	Nancy Janeth Calvillo Guevara (Claudia Angélica Robles Domínguez)
26 (2012)	Guanajuato, Gto.		Nancy Janeth Calvillo Guevara (Claudia Angélica Robles Domínguez, Verónica Arredondo Luna)
25 (2011)	San Luis Potosí, S.L.P.	Nancy Janeth Calvillo Guevara (María de Jesús Acuña Macías)	Nancy Janeth Calvillo Guevara (María de Jesús Acuña Macías)
24 (2010)	Ensenada, Baja California	Alberto García Aguilar/ Nancy Janeth Calvillo Guevara (María de Jesús Acuña Macías)	
23 (2009)	Campeche, Camp.	Alberto García Aguilar	Alberto García Aguilar (Alejandra Fabiola Huitrado Mora)
22 (2008)	San Carlos, Sonora	Gloria Teresa González de Ávila	Gloria Teresa González de Ávila (Alejandra Fabiola Huitrado Mora)
21 (2007)	Saltillo, Coahuila		Gloria Teresa González de Ávila (Judith Alejandra Hernández Sánchez)
20 (2006)	Zacatecas, Zac.	Gloria Teresa González de Ávila (Luis Ignacio de la Torre Acevedo)	
19 (2005)	Campeche, Camp.	Elsa Castillo Báez	
18 (2004)	Ixtapan de la Sal, Estado de México		
17 (2003)	Guanajuato, Gto.	Gloria Teresa González de Ávila	Gloria Teresa González de Ávila, (Itza Tláloc Curriel Cabral)
16 (2002)	Colima, Col.		Leticia Sosa Guerrero (Luis Ignacio de la Torre Acevedo)
15 (2001)	Oaxtepec, Mor.		Lorena Jiménez Sandoval (Luis Ignacio de la Torre Acevedo)
14 (2000)	Morelia, Mich.	Gloria Teresa González de Ávila / Elvira Borjón Robles	Gloria Teresa González de Ávila (Claudia Angélica Robles Domínguez)
13 (1999)	Oaxaca, Oax.	Gloria Teresa González de Ávila	
12 (1998)	Querétaro, Qro.	Gloria Teresa González de Ávila (Judith Alejandra Hernández Sánchez)	Sin información
11 (1997)	Monterrey, N.L.	Claudia Angélica Robles Domínguez	Sin información
10 (1996)	Mérida, Yuc.	Gustavo de la Rosa Muruato	Lorena Jiménez Sandoval
9	Colima, Col.		Claudia Angélica Robles Domínguez

(1995)			
8 (1994)	Guadalajara, Jal.		Lorena Jiménez Sandoval
7 (1993)	Acapulco, Gro.		Claudia Angélica Robles Domínguez
6 (1992)	La Trinidad, Tlax.		Lorena Jiménez Sandoval (Claudia Angélica Robles Domínguez)
5 (1991)	Oaxtepec, Mor.		Lorena Jiménez Sandoval (Claudia Angélica Robles Domínguez)
4 (1990)	Guanajuato, Gto.	Juan Antonio Pérez	Sin información
3 (1989)	Metepec, Pue.		Sin información
2 (1988)	Hermosillo, Son.	Sergio Octavio Escobar Medina	Sin información
1 (1987)	Xalapa, Ver.		Sin información

**Nota 1:** las sedes de los concursos nacionales fueron tomadas de Figueroa y Valdez (2019).

**Nota 2:** los delegados estatales fueron tomados del archivo de la OMM Zacatecas y de información compartida por Claudia Robles, Leticia Ramírez, Judith Hernández, Lorena Jiménez, Leticia Sosa, Gloria González y Juan Antonio Pérez.

**Nota 3:** los delegados de los concursos nacionales fueron tomados de los engargolados 2004 - 2009 (OMM, s.f.-b) y de información compartida por Claudia Robles, Leticia Ramírez, Judith Hernández, Lorena Jiménez, Leticia Sosa, Gloria González y Juan Antonio Pérez.

A continuación, en la Tabla 2 se presentan nombres de los participantes en los concursos nacionales, así como estadísticas con respecto a la participación de nuestro estado en dicho evento.

**Tabla 2. Estadísticas de la participación de la Delegación Zacatecas en el Concurso**

OMM (Año)	Participantes	Puntos	Ranking	Medallas	Otros premios
36 (2022)	Braulio González García, Jimena Sofía Díaz Sánchez, Rodrigo Saldívar Mauricio, Juan Pablo Espinosa Martínez, Rafael Argumedo Solís, Fernanda Salazar Quiñonez	92	12	6 Bronces	Tres preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centro América y el Caribe [OMCC]
35 (2021)	Jimena Sofía Díaz Sánchez, María Inés López García, Fernanda Salazar Quiñonez, Rodrigo Saldívar Mauricio, Emmanuel Alejandro Sánchez Silva, Bruno González Sánchez	62	21	1 Plata 2 Bronces	Una preseleccionada para la European Girls' Mathematical Olympiad [EGMO]
34 (2020)	Jorge Hiram Arroyo Almeida, Emmanuel Alejandro Sánchez Silva, Diego Haro Sandoval, Noel Francisco Rodríguez Sánchez, Fernanda Salazar Quiñonez, María Inés López García	119	10	1 Oro 4 Bronces 1 Mención Honorífica [MH]	Ninguno
33 (2019)	Jorge Hiram Arroyo Almeida, Ángel Dimitri Ortega Vaquera, Diego Haro Sandoval, Emmanuel Alejandro Sánchez Silva, Noel Francisco Rodríguez Sánchez, Daianna González Padilla	102	13	1 Plata 3 Bronces 2 MH	Ninguno
32 (2018)	Édgar Antonio Femat Rocha, Samuel Gurrola Viramontes, Ana Teresa Calderón Juárez, Denisse Garnica Sánchez, Noel Francisco Rodríguez Sánchez, Diego Haro Sandoval	49	18	1 Plata 2 Bronces	Una preseleccionada para la EGMO
31 (2017)	Ana Teresa Calderón Juárez, Samuel Gurrola Viramontes, Jorge Hiram Arroyo Almeida, Édgar Antonio Femat Rocha, Mauro Enrique Castanedo Hernández, Kevin Daniel Cano Murillo	100	15	4 Bronces 1 MH	Un preseleccionado para la OMCC
30 (2016)	Juan Eduardo Castanedo Hernández, Adrián Rodríguez Arellano, Samuel Gurrola Viramontes, Kapioma Villarreal Haro, Ana Teresa Calderón Juárez, Ana del Socorro Viramontes Medina	73	16	1 Oro 1 Bronce	Ninguno
29 (2015)	Juan Carlos Vázquez Álvarez, Juan Eduardo Castanedo Hernández, Eduardo Rosales López, Adrián Rodríguez Arellano, Ana Teresa Calderón Juárez, Kapioma Villarreal Haro	122	8	1 Oro 2 Platas 1 Bronce	Copa superación, Tercer lugar
28 (2014)	Juan Eduardo Castanedo Hernández, Juan Carlos Vázquez Álvarez, Adrián Rodríguez Arellano, Eduardo Rosales López, Oscar Germán Robles Torres, Manuel Alejandro Rabling Morán	98	15	1 Plata 2 Bronces 2 MH	Un preseleccionado OMCC
27 (2013)	Juan Eduardo Castañedo Hernández, Gerardo Hurtado Hernández, Adrián Rodríguez Arellano, Eduardo Rosales López,	53	17	1 Plata 2 Bronces	Ninguno

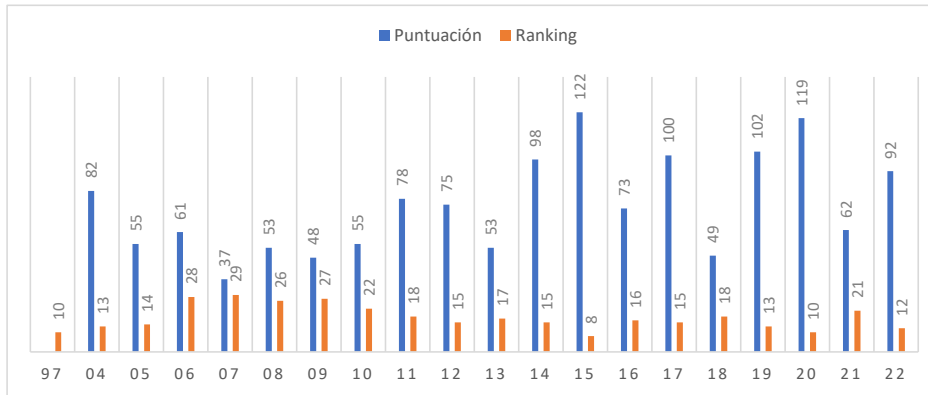
	Héctor Jesús Sotelo Carrillo, Juan Carlos Vázquez Álvarez				
26 (2012)	Omar de Ávila Martínez, Juan Carlos Vázquez Álvarez, Juan Pablo Solís Gamboa, Diego Heriberto Esparza Hernández, Juan Luis Villarreal Haro, Lauro Ángel Márquez Rodríguez	75	15	3 Bronces	Ninguno
25 (2011)	Noé Muñoz Elizondo, Jorge Sebastián Tapia Macías, José Javier Cruz Torres, Édgar Rafael Esparza Hernández Juan Luis Villarreal Haro, Juan Víctor Chapas Castruita	78	18	1 Plata 2 MH	Ninguno
24 (2010)	Hugo Alejandro Rivera Ortiz Gabriela Bárcenas Enríquez, José Santiago González Machén, Noé Muñoz Elizondo, Leonardo López Dehuma, Omar Jacobo García	55	22	2 Bronces	Ninguno
23 (2009)	Daisy Correa de la Torre, Jesús Sandoval García, Jorge Sebastián Tapia Macías, José Santiago González Machén, Juan Víctor Chapas Castruita, Noé Muñoz Elizondo	48	27	4 MH	Ninguno
22 (2008)	Adrián de Jesús Celestino Rodríguez, Elías Escobedo García, Fernando Ibarra Tejeda, José Luis Blanco Ortiz, José Santiago González Machén, María Gabriela Sánchez Muñoz	53	26	1 Bronce 2 MH	Ninguno
21 (2007)	Carlos Uriel Pinedo Berumen, Edgar Omar Almeida Miranda, Fernando Ibarra Tejeda, Goretti Guadalupe Hernández Cardoso, José Luis Blanco Ortiz, María Gabriela Sánchez Muñoz	37	29	1 MH	Ninguno
20 (2006)	Fernando Ibarra Tejeda, Goretti Guadalupe Hernández Cardoso, José Luis Blanco Ortiz, Juan Irving Solís Vidaña, Roberto David Juárez Leños, Roilhi Frajo Ibarra Hernández	61	28	1 Bronce 1 MH	Ninguno
19 (2005)	Daniel Mercado Casas Torres, Gerardo Alberto García Marín, Manuel Ángel Guevara López, Julio César Ricardo Mendoza, Pedro Alvarado Medina, Saúl Delgadillo Rodríguez	55	14	1 Oro 1 Bronce	Ninguno
18 (2004)	Manuel Ángel Guevara López, Daniel Mercado Casas Torres, Pedro Rubén Rivera Ortiz, Cuauhtémoc Emmanuel Rodríguez Velásquez, Juan Irving Solís Vidaña, Ibrahim Villanueva Gutiérrez	82	13	1 Oro 3 Bronces	Copa superación, Primer lugar.
17 (2003)	Alejandra Fabiola Huitrado Mora, Manuel Ángel Guevara López, Juan Irving Solís Vidaña, Ma. de los Ángeles Guevara Hernández, Cuauhtémoc Emmanuel Rodríguez Velásquez, Luis Alberto Hernández	Sin información		1 Oro 1 MH	Ninguno

Hernández					
16 (2002)	Fidel Galaviz Lozano, Fermín Omar Reveles Gurrola, Ernesto Fernández Nava, José Ángel Frías García, Alejandra Fabiola Huitrado Mora, Manuel Ángel Guevara López	Sin información		3 MH	Ninguno
15 (2001)	José Ángel Frías García, Blanca Bárbara Díaz Aguilar, César Alejandro Báez, José Luis Ulises Esqueda Rodríguez, Ernesto Fernández Nava, Marco Vinicio Magaña Morales	Sin información			Sin información
14 (2000)	Rubén Darío Barba Navarro, César Alejandro Báez, Samuel Solís Gamboa, Edgardo Solís García, José Ulises Esqueda, Felipe de Jesús Solís Gamboa	Sin información		1 Bronce	Sin información
11 (1997)	Adrián Acuña, Sergio	Sin información	10	1 Oro 1 Plata	Sin información
10 (1996)	Sergio, Alejandro Dávila, Daniel Solís	Sin información		1 Plata	Sin información
9 (1995)	Remberto Aréchiga, Fernando Carlos, Alejandro Dávila, Sergio, Daniel Solís	Sin información		1 Bronce	Sin información
8 (1994)	Remberto Aréchiga, Emmanuel, Fernando Carlos, Flavio, Ángel de la Rosa y Daniel Solís	Sin información		3 Bronces	Sin información
4 (1990)	Juan Francisco Viramontes Valenzuela	Sin información			Sin información

**Nota 1.** La mayor parte de la información recabada fue tomada del archivo de la OMM Zacatecas, lo demás fue proporcionado por Juan Viramontes y Daniel Solís.

**Nota 2.** Se omitieron los años en los cuales no se cuenta con información.

En la Gráfica 1 se puede observar la puntuación y el ranking del estado de Zacatecas del 2004 a la fecha. En ella podemos observar que el mejor lugar que nuestro estado ha obtenido fue el octavo, en el 2015, seguido del décimo en 1997 y 2020.

**Gráfica 1. Puntuación y Ranking OMMZAC 2004 – 2022**

## Reflexiones finales

Es importante presentar a los actores que han hecho posible que la OMM se desarrolle en el estado de Zacatecas. En lo particular, se reconoce que quienes en algún momento fungieron como delegados, codelegados o incluso olímpicos, en la actualidad, forman parte del equipo que hace posible que año con año se desarrolle el proyecto, apoyando en las diferentes etapas de la olimpiada, como profesores, diseñadores de examen, jurados en los exámenes, entrenadores o equipo de apoyo, por mencionar algunas actividades.

En cuanto a la información estadística presentada, se observa que a partir del 2011 es cuando la delegación se ha encontrado entre lugares del 10 al 20. Al respecto, se considera que se ha ido madurando en la manera de realizar la preparación de los olímpicos, sin embargo, se reconoce que aún hay un largo camino por recorrer.

En general se puede decir que la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Zacatecas sigue cumpliendo sus propósitos como proyecto de vinculación de la Unidad Académica de Matemáticas.

## Galería fotográfica

Por último, presentamos una galería fotográfica con algunas de las delegaciones zacatecanas de la OMM.

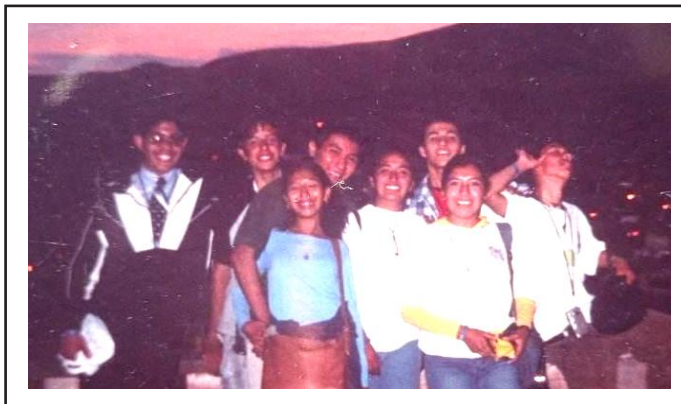
*Imagen 1. Olimpiadas VIII 1994 Guadalajara, IX 1995 Colima y X 1996 Mérida*





*Nota. Fotografías cortesía de Daniel Solís.*

*Imagen 2. Olimpiada XVII, 2003, Guanajuato*



*Nota. Fotografía cortesía de Cuauhtémoc Rodríguez.*

***Imagen 3. Olimpiada XVIII, 2004, Ixtapan de la Sal***



***Nota. Fotografía cortesía de Cuauhtémoc Rodríguez y Pedro Rivera.***

***Imagen 4. Olimpiada XX, 2006, Zacatecas***



***Nota. Fotografía recuperada de Celestino y Ibarra (s. f.).***

*Imagen 5. Olimpiada XXI, 2007, Saltillo*



*Nota. Fotografía recuperada de Celestino y Ibarra (s. f.).*

*Imagen 6. Olimpiada XXII, 2008, San Carlos, Sonora*



*Nota. Fotografía recuperada de Celestino y Ibarra (s. f.).*

**Imagen 7.** Olimpiada XXIII, 2009, Campeche



*Nota.* Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

**Imagen 8.** Olimpiada XXIV, 2010, Ensenada, Baja California



*Nota.* Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

*Imagen 9. Olimpiada XXV, 2011, San Luis Potosí*



*Nota. Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.*

*Imagen 10. Olimpiada XXVI, 2012, Guanajuato*



*Nota. Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.*

**Imagen 11.** Olimpiada XXVII, 2013, Huasca de Ocampo, Hidalgo



*Nota.* Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

**Imagen 12.** Olimpiada XXVIII, 2014, Toluca, Estado de México



*Nota.* Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

*Imagen 13. Olimpiada XXIX, 2015, Guadalajara, Jalisco*



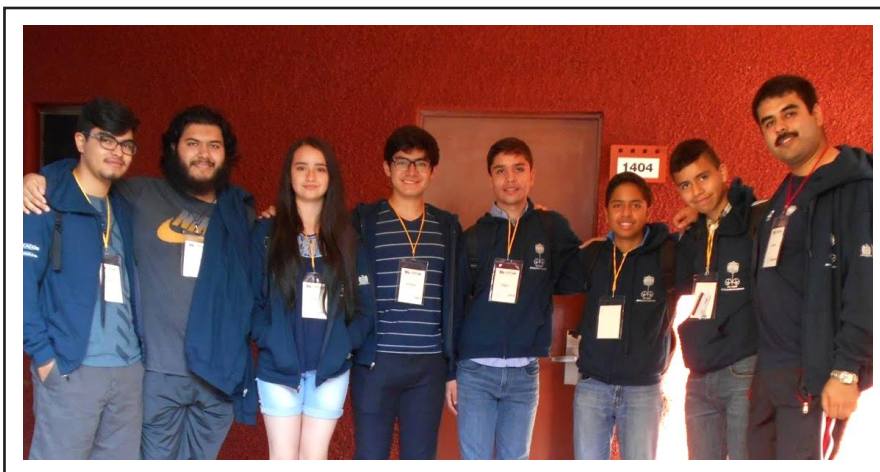
*Nota. Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.*

*Imagen 14. Olimpiada XXX, 2016, Acapulco, Guerrero*



*Nota. Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.*

*Imagen 15. Olimpiada XXXI, 2017, Santiago, Nuevo León*



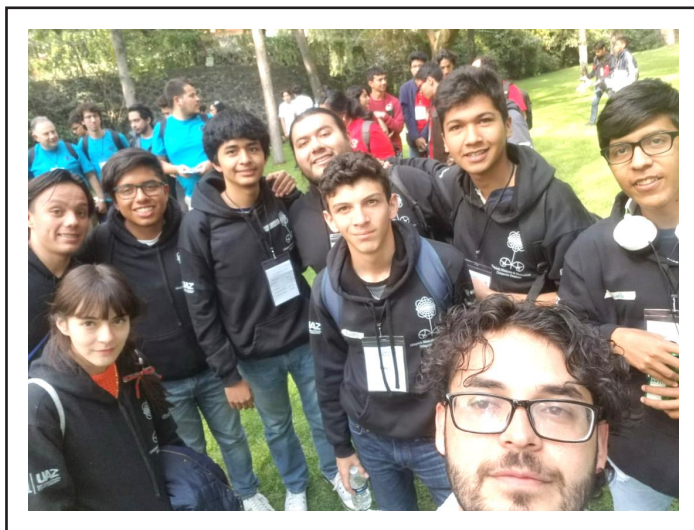
*Nota. Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.*

*Imagen 16. Olimpiada XXXII, 2018, Campeche*



*Nota. Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.*

**Imagen 17.** Olimpiada XXXIII, 2019, Ciudad de México



**Nota.** Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

**Imagen 18.** Olimpiada XXXIV, 2020, Virtual, Zacatecas



**Nota.** Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

**Imagen 19.** Olimpiada XXXV, 2021, Virtual, Zacatecas



**Nota.** Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

**Imagen 20.** Olimpiada XXXVI, 2022, Oaxtepec, Morelos



**Nota:** Fotografía recuperada del archivo de la OMM Zacatecas.

## Agradecimientos

A los profesores de la Unidad Académica de Matemáticas que compartieron información relacionada con los primeros años de la Olimpiada en Zacatecas: Dra. Lorena Jiménez Sandoval; Dra. Leticia Adriana Ramírez Hernández; M. en C. Claudia Angélica Robles Domínguez; M. M. E. Gloria Teresa González de Ávila; Dra. Leticia Sosa Guerrero; Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez; Dr. Juan Antonio Pérez y a los olímpicos que compartieron información y fotografías: Cuauhtémoc Rodríguez y Daniel Solís.

## Referencias

- Celestino, A. J., y Ibarra, F. (s.f.). Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Zacatecas. <http://ommzac.blogspot.com/>
- Figueroa, M. A., y Valdez, R. (2019). Olimpiada Mexicana de Matemáticas. <https://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/engargolados/engargolado19.pdf>
- Morelos, S., Londoño, N., y Salazar, I. (2016). Sobre la resolución de problemas en la olimpiada mexicana de matemáticas. En E. Mariscal. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 148-156). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Olimpiada Mexicana de Matemáticas. (s.f.-a). ¿Qué es la OMM? <https://www.ommenlinea.org/presentacion/objetivos/>
- Olimpiada Mexicana de Matemáticas. (s.f.-b). Engargolados OMM. <https://www.ommenlinea.org/publicaciones/engargolado/>

## Sobre los autores

M. en C. Nancy Janeth Calvillo Guevara  
 Contacto: [ncalvillo@uaz.edu.mx](mailto:ncalvillo@uaz.edu.mx)

Maestra en Ciencias por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Docente investigadora de la Unidad Académica de Matemáticas.

M.T.I. Mónica del Rocío Torres Ibarra

Contacto: mtorres@uaz.edu.mx

Maestra en Tecnologías de la Información.

Docente investigadora de la Unidad Académica de Matemáticas.

Dra. Elvira Borjón Robles

Contacto: elvirabr@uaz.edu.mx

Doctora en Educación.

Docente investigadora de la Unidad Académica de Matemáticas.

Subcoordinadora de Gestión y Aseguramiento de la Calidad de la UAZ.

Dr. Plácido Hernández Sánchez

Contacto: placido.hernandez@uaz.edu.mx

Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero.

Docente investigador de la Unidad Académica de Matemáticas.

Responsable del Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas en Zatecas.

M. en C. Luz Vanessa Bacio Parra

Contacto: lbacio@uaz.edu.mx

Maestra en Ciencias con especialidad en Probabilidad y Estadística por el CIMAT

Docente investigadora de la Unidad Académica de Matemáticas.

Dra. Leticia Sosa Guerrero

Contacto: [lsosa@uaz.edu.mx](mailto:lsosa@uaz.edu.mx)

Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Huelva.

Docente investigadora de la Unidad Académica de Matemáticas.



## **MIIMAZ: historia de una idea**

*Plácido Hernández Sánchez*

### **Resumen**

Narraré la historia y desarrollo de una idea: el pasado, presente y futuro del Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas. Relataré los debates, las luchas, las reflexiones, las tensiones, los éxitos, los aprendizajes y los desvelos para la materialización de esa idea y los desafíos para continuar con su desarrollo.

### **Nacimiento de la idea**

La idea de construir un museo de matemáticas en Zacatecas tiene sus raíces a finales del año 2000, cuando cinco estudiantes de la antigua Facultad de Matemáticas, de la generación 1999-2001, buscábamos un problema de investigación para obtener el grado de maestría en matemática educativa. Gema A. Mercado Sánchez fue quien nos planteó el desafío de construir un museo de matemáticas en Zacatecas.

Al principio, los cinco maestrantes fuimos seducidos por ese desafío. El debate al interior del aula, en los pasillos de la facultad y en el café se convirtió en el cotidiano de nuestra vida académica. Un caudal de preguntas empezó a fluir en los meses siguientes. Reflexionamos sobre las posibilidades de enseñanza y aprendizaje en el museo; cómo

favorecer el razonamiento, la imaginación, el asombro y el interés más allá de la escuela, en un ambiente de juego... qué artefactos debería albergar el museo.

Algunos empezamos a buscar ideas espectaculares que pensábamos que podrían seducir al público hacia las matemáticas y podrían constituir el núcleo del museo. Sólo dos de los maestrantes invitados persistimos en esa idea: Huberto Meléndez Martínez y quien escribe, Plácido Hernández Sánchez, bajo la guía de nuestra directora de tesis: la doctora Gema A. Mercado Sánchez (Hernández y Meléndez, 2003).

Nuestro profesor de Seminario de la Enseñanza de la Matemática, Luis Manuel Aguayo Rendón, y nuestra directora de tesis lanzaban preguntas incisivas que problematizaban la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el museo. Este debate favoreció que el museo fuera interactivo e itinerante. Interactivo porque queríamos que la niñez experimentara con la colección, itinerante porque pensábamos llevarlo a todo el estado de Zacatecas. Así se fusionaron todas estas ideas, en el acrónimo acuñado por el que escribe, MIIMaZ, creado para significar Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas.

## **Materialización de la colección**

Las palabras prototipos didácticos, fractales, máquinas matemáticas articuladas, superficies mágicas de Plateau, billar elíptico, poliedro e interactividad empezaron a fluir en nuestras discusiones, pero, ¿cómo materializar estas ideas en un prototipo con fines didácticos? Huberto Meléndez Martínez durante largo tiempo había estudiado y desarrollado un robusto conjunto de estructuras poliédricas. Por otro lado, se integró en el equipo José Luis Huitrado Rizo, un ingenioso profesor normalista con habilidad para trabajar la madera, sus preguntas incisivas, pero, sobre todo, su generosidad desinteresada contribuyó de gran manera a materializar algunas de estas ideas.

La geometría protagonizó la primera colección del MIIMaZ. Un robusto conjunto de construcciones poliédricas emergió en forma de sólidos platónicos y arquimedianos. Estos conceptos se extendieron y

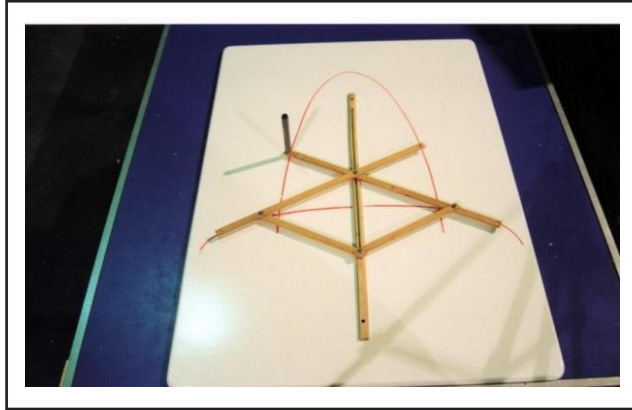
abandonaron el libro de Mandelbrot para materializarse en lo que Henri Poincaré alguna vez llamó “Galería de monstruos fractales” (Mandelbrot, 1977). Las superficies de Plateau surgieron para ostentar la conexión entre geometría y naturaleza. El doble cono, el algebalanza, la cicloide, la máquina de Galton y las máquinas articuladas emergieron para provocar el asombro del alumnado. Éstas son algunas de las exhibiciones que constituyeron la primera colección del MIIMaZ y que se ilustran a continuación.

**Imagen 1.** Exhibición “Monstruos Fractales”. Esponja de Menger, tetraedro de Sierpinski, octaedro fractal, dodecaedro fractal e icosaedro fractal



*La intencionalidad de la exhibición es mostrar la existencia de estructuras con dimensiones fraccionarias y que tienen volumen cero y área infinita.*

**Imagen 2. Exhibición Elipsógrafo de Leonardo**



*Consiste en un rombo articulado  $ACBD$ . La articulación  $A$  está fija a la regleta  $R$ , empotrada sobre un pizarrón, la articulación  $B$  se desliza sobre la ranura de la regleta  $R$ . Al colocar plumas en los extremos perforados de las regletas del rombo, se generan dos mitades de elipses. La intencionalidad del prototipo es resignificar la elipse en un ambiente experimental y lúdico.*

**Imagen 3. Exhibición Máquinas de Galton**



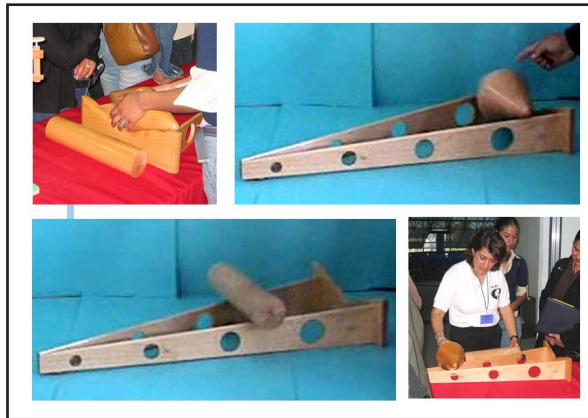
*Compuestas por una red de clavos y una boquilla en la parte superior de la máquina donde se colocan canicas que se mueven a través de la red de clavos, generando la distribución normal. La intencionalidad del prototipo es mostrar que en la naturaleza “casi todo es normal”.*

**Imagen 4. Exhibición Problema de Plateau**



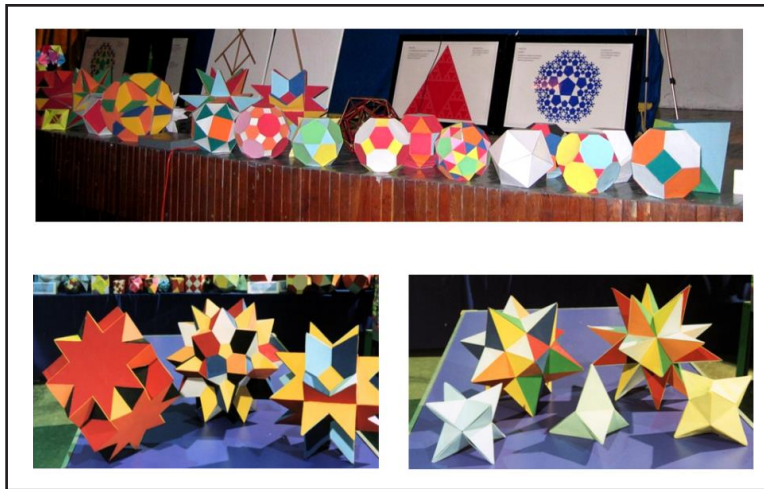
*Cada estructura tiene tornillos incrustados sobre dos superficies de acrílico. Al introducir las en una solución de agua, jabón y glicerina se generan superficies entre el acrílico y los tornillos. La exhibición pone de relieve los conceptos de camino mínimo, superficie mínima y punto de Fermat. La actividad es ideal para provocar que el público deduzca y valide su conjetura con el experimento.*

**Imagen 5. Prototipo Doble cono**



*Las cuatro fotografías muestran dos versiones del doble cono. El cilindro rueda hacia abajo al soltarlo desde la parte superior de la estructura en V. ¿Cuál será el comportamiento del doble cono al colocarlo en la parte superior de la estructura? ¿Y si se coloca en la parte inferior? Intencionalidad: que el público formule conjeturas y las valide con el experimento.*

**Imagen 6.** Exhibición de poliedros platónicos, arquimedianos y estrellados



*La intencionalidad de la exhibición es favorecer el descubrimiento de la relación entre las caras, vértices y aristas de un poliedro.*

**Imagen 7.** Exhibición la cicloide



*Constituida por una base, un soporte vertical que sostiene un arco de cicloide de madera donde se adhieren una tira recta y otra cicloidal de acrílico. La intencionalidad del prototipo es experimentar y conjeturar en un ambiente lúdico con la curva de descenso más rápido para conectar dos puntos dados.*

## Difusión de la idea

El 24 de mayo de 2001, establecimos un debate con José Esteban Martínez Espinoza, director del Instituto Zacatecano de la Cultura “Ramón López Velarde”; Jorge Echevarri Lizárraga, museógrafo del Museo de Guadalupe, Zacatecas; Gema A. Mercado Sánchez, directora de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) y Luis Manuel Aguayo Rendón, docente del Seminario de Enseñanza de la Matemática, el que se reflexionó en torno a las posibilidades de construcción del MIIMaZ.

Graciela Álbort compartió su experiencia como coautora del Museo “El Caracol” de Ensenada B. C. S., el 10 de julio de 2000. Rosamaría Franco, directora del Museo de Guadalupe, nos sugirió realizar un guion temático el 7 de agosto de 2001. En agosto del mismo año, Rogelio Cárdenas Hernández, Rector de la UAZ, autorizó un espacio para el MIIMaZ en las nuevas instalaciones de la Facultad de Matemáticas.

El XXXV Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), celebrado del 6 al 11 de octubre del año 2002 en Durango, fue el escaparate para difundir el proyecto a través de la conferencia “Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas”. Durante la charla se mostraron los antecedentes, la problemática inherente al proyecto y los avances de la construcción. La sala repleta de congresistas, inmersos en un escenario poblado con prototipos didácticos mostró tal interés que una hora después de que finalizó la conferencia aún permanecían interactuando con la colección. Papalote “Museo del niño”, presente en la conferencia, mostró notable interés por el proyecto. La conferencia culminó con un éxito rotundo. Paralelamente el equipo cursaba el primer diplomado en museología.

La idea MIIMaZ fue diseminada en el VII Congreso Estatal de la Asociación de Profesores de Matemáticas en Guadalajara y en la Facultad de Matemáticas de la UAZ, ante el Secretario de Educación Pública y ante el director del Consejo Zacatecano de Ciencia y Tecnología (COZ-CyT), en marzo de 2003. En la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), ante autoridades y guías de Papalote “Museo del niño”, el 24 de mayo de 2003; se estaba probando la interactividad de nuestra colección para

invitarnos a constituir la sala “Taller creativo” ante su inminente arribo a Zacatecas, del 7 de junio al 21 de septiembre de 2003.

El problema de Plateau, las torres de Hanoi, tangrams, origami, fractales, doble cono, la cicloide y otros prototipos fueron puestos en escena ante 45 mil visitantes durante casi cuatro meses. El taller creativo constituyó el escenario ideal para observar la interactividad entre visitantes y prototipos, nuestra participación finalizó nuevamente con un éxito notable. Hubo momentos en que la gente prefería visitar el modesto taller creativo de matemáticas que las sofisticadas exhibiciones de Papalote. Algunas imágenes se ilustran a continuación.

*Imagen 8. Papalote Móvil en “Bonito Pueblo”, Guadalupe, Zac., junio de 2003*



*Imagen 9. Papalote móvil. Sala “Taller Creativo”*

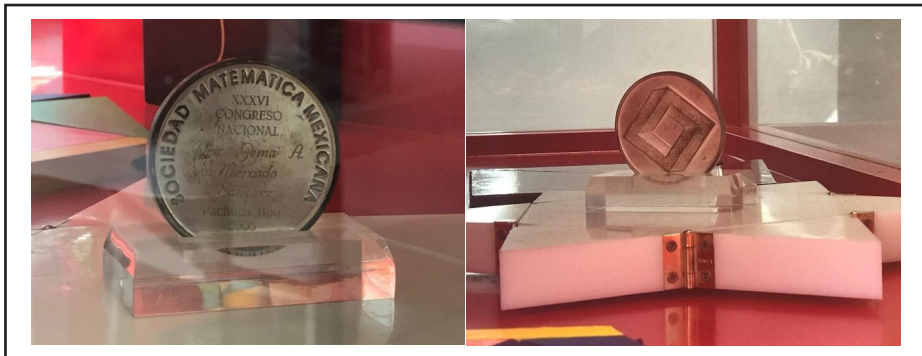


*De arriba hacia abajo y de izquierda a derecha se ve el elipsógrafo de Leonardo, poliedros estrellados y diferentes vistas de la exhibición “Monstruos fractales”.  
Guadalupe, Zac., junio 2003.*

Los organizadores del XXXVI Congreso Nacional de la SMM invitaron al equipo de investigadores del proyecto MIIMaZ, liderado por Gema A. Mercado Sánchez, a dictar la Conferencia Magistral “Taller Creativo de Matemáticas”. El equipo estaba formado por Plácido Hernández Sánchez, Huberto Meléndez Martínez, José Luis Huitrado Rizo y un vigoroso equipo de estudiantes de la facultad de Matemáticas. La conferencia fue dictada en las instalaciones de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), durante la semana del 12 al 17 de octubre de 2003.

Al finalizar la Conferencia Magistral, unos 300 asistentes experimentaron y admiraron la colección de prototipos didácticos. El proyecto fue reconocido por la SMM con la medalla al mérito.

*Imagen 10. Medalla otorgada al MIIMaZ por la Sociedad Matemática Mexicana, octubre de 2003*



*Imagen 11. Preparando el escenario para la Conferencia Magistral en el XXXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. UAEH, Hidalgo, octubre de 2003*



**Imagen 12.** Asistentes a la Conferencia Magistral en el XXXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. UAEH, Hidalgo, octubre de 2003



**Imagen 13.** Congresistas experimentando en el taller creativo de matemáticas en el XXXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. UAEH, Hidalgo, octubre de 2003



El MIIMaZ, el 8 de noviembre de 2003, puso en escena, lo que podemos llamar, el Primer Festival Matemático en las instalaciones del Centro de Capacitación Campesina, en Morelos, Zac., ante 250 profesores de matemáticas de Secundaria. El motivo fue la Reunión Estatal de la Academia de Maestros de Secundaria de Zacatecas.

*Imagen 14. Academia Estatal de Profesores de Matemáticas de Secundaria en el primer festival matemático. Morelos, Zac., noviembre de 2003*



El MIIMaZ llegó a la Unidad Académica de Matemáticas el 19 de diciembre de 2003. Huberto Meléndez Martínez y Plácido Hernández Sánchez defendieron la tesis “MIIMaZ. Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas”, bajo la dirección de la Dra. Gema A. Mercado Sánchez para obtener el grado de Maestría en Matemática Educativa. Por primera vez en la historia de la escuela, la defensa de una tesis se realizó en un escenario repleto de gente y de prototipos matemáticos. Después del protocolo formal para dar el grado, el MIIMaZ quedó establecido en las nuevas instalaciones de la Unidad Académica de Matemáticas.

## Apertura del Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas

El MIIMaZ abre sus puertas el 27 de enero del año 2004. La Dra. Gema A. Mercado Sánchez, directora de la escuela, me invita a administrar el museo, desde entonces acuden al museo la niñez y la juventud a admirar e interactuar con la colección. Paralelamente, en ese mismo año, el equipo cursó el segundo diplomado en museología.

### *Matemática Itinerante*

La Unidad Académica de Matemáticas empieza a proyectarse a través del museo itinerante. Un taller fractal fue puesto en escena con niñas y niños en el Museo de Ciencias de la UAZ, el 12 de marzo de 2005.

**Imagen 15.** Taller de fractales puesto en escena en el Museo de Ciencias de la UAZ. Al centro un tetraedro de Sierpinski en su etapa 4, constituido de 256 tetraedros. Marzo de 2005



## El MIIMaZ y el Zigzag

Una oportunidad para continuar con el desarrollo del MIIMaZ surge cuando somos invitados a colaborar en el Departamento de Investigación y Desarrollo del Zigzag. Los talleres de matemáticas desarrollados en el MIIMaZ cayeron en un terreno propicio para su puesta en escena de manera paralela a los talleres de física, química, matemáticas, biología y astronomía. En los dos primeros campamentos de ciencia fue puesto en escena un taller fractal con la niñez del Zigzag, el 18 de julio de 2006 y el 3 de agosto de 2007. Se muestran algunas imágenes de esa actividad.

*Imagen 16. Copo de Nieve de Koch y Tetraedro de Sierpinski, taller puesto en escena en el Zigzag, Centro Interactivo de Ciencia y Tecnología de Zacatecas, julio de 2006*



**Imagen 17.** Tetraedro de Sierpinski y copo de Nieve de Koch, taller puesto en escena en el Zigzag, Centro Interactivo de Ciencia y Tecnología de Zacatecas, julio de 2006



## Los festivales matemáticos

El Museo empezó a ser itinerante desde su diseminación como idea. Éste potenció la divulgación de las matemáticas en Zacatecas desde el año 2004 a través de los festivales matemáticos puestos en escena por el Grupo Hypatia de divulgación de las matemáticas bajo el auspicio de la Unidad Académica de Matemáticas, el COZCyT y organismos como el Consulado de los Estados Unidos en Monterrey.

El MIIMaZ ha sido mensajero de las matemáticas en comunidades rurales como Aguagorda de los Patos; ha transitado desde las grandes metrópolis como Ciudad de México, Monterrey y Guadalajara hasta la montaña de Guerrero en Alpoeyca. Aquí se muestran algunas imágenes de su carácter itinerante.

**Imagen 18.** *Estudiantes de la Unidad Académica de Matemáticas que pusieron en escena el Primer Festival Matemático en la Escuela Normal “Manuel Ávila Camacho”, Zacatecas, noviembre de 2009*



**Imagen 19.** *Centro de Convenciones Zacatecas, XLII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, Zacatecas, Festival Matemático 2009*



**Imagen 20.** Zigzag, Fractal Salchicha de Minkowski, taller con material reciclable puesto en escena en el Zigzag, Centro Interactivo de Ciencia y Tecnología de Zacatecas, julio de 2009



**Imagen 21.** VII Congreso Regional de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, Gómez Palacio, Dgo., octubre de 2011



**Imagen 22.** Segundo festival matemático en la Escuela Normal “Manuel Ávila Camacho”, Congreso Estatal de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, Zacatecas, 2011



**Imagen 23.** Cinvesniñ@S 5, CIVESTAV, Ciudad de México, octubre de 2011



**Imagen 24.** Experimentando con nitrógeno líquido durante la XVIII Semana Nacional de Ciencia y Tecnología, Genaro Codina, Zac., octubre 2011



**Imagen 25.** Cinvesniñ@s 6, CINVESTAV, Ciudad de México, noviembre 2012



**Imagen 26.** *Cinvesniñ@s 7, CINVESTAV, Ciudad de México, 2013*



**Imagen 27.** *A la izquierda: Taller de Legos, Ermita de Guadalupe, Jerez, Zac.; a la derecha equipo de ciencia en el campamento de verano, julio 2013*



**Imagen 28.** XXV Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas, Escuela Secundaria Técnica “Tomás Alva Edison”, Cd. de México, enero de 2013



**Imagen 29.** IV Encuentro Regional sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. Montaña de Guerrero, Alpoyecá, 2013



**Imagen 30.** *Jornadas del Centro de Educación Media. Construyendo un compuesto de cinco cubos. Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA), noviembre 2013*



**Imagen 31.** *Tercer Encuentro Conjunto de la Real Sociedad Matemática Española y la Sociedad Matemática Mexicana. Festival Matemático, Plazuela “Miguel Auza”, Zacatecas, 2014*



**Imagen 32.** Civesniñ@s 8. CINVESTAV. Ciudad de México, octubre 2013



**Imagen 33.** Olimpiada Estatal de Matemáticas. Festival Matemático. A la izquierda experimentando con el número de oro; a la derecha experimentando con la máquina de Galton; abajo el grupo Hypatia. Preparatoria II de la UAZ, Zacatecas, abril 2015



**Imagen 34.** Olimpiada Estatal de Matemáticas, Grupo Hypatia sosteniendo un omnipoliedro. Festival Matemático, Preparatoria II, UAZ, abril 2016



**Imagen 35.** Festival Matemático en San José De Lourdes. Fresnillo, Zac., noviembre 2016



**Imagen 36.** *XLIX Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana. Grupo Hypatia sosteniendo un omnipoliedro. Festival Matemático, UAA, Aguascalientes, octubre 2016*



**Imagen 37.** *Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey, "Construcción social de las matemáticas". Festival Matemático, Aguagorda de los Patos, Pinos, Zac., diciembre 2017.*



**Imagen 38.** Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey. “Construcción social de las matemáticas”. Festival Matemático, COBACH, Sain Alto, Zac., octubre 2017



**Imagen 39.** Cartel del Festival Matemático. Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey: “Construcción social de las matemáticas”



**Imagen 40.** Inauguración del Festival Matemático. Plazuela “Miguel Auza”, Zacatecas, septiembre 2017



**Imagen 41.** Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey, “Construcción social de las matemáticas”. Festival Matemático, colonia González Ortega, Sombrerete, Zac., diciembre 2017



**Imagen 42.** Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey, "Matemática Itinerante". Festival Matemático, juegos de siembra. EST 2, Miguel Auza, Zac., diciembre 2018



**Imagen 43.** Grupo Hypatia, Escuela Secundaria Técnica 2. Miguel Auza, Zac., diciembre 2018



**Imagen 44.** Visitantes de la Escuela Secundaria “José María Vázquez”. Fresnillo, Zac., Unidad Académica de Matemáticas, mayo 2018



**Imagen 45.** Feria de Matemáticas, Secundaria General “José María Vázquez” Fresnillo, Zac., 2018



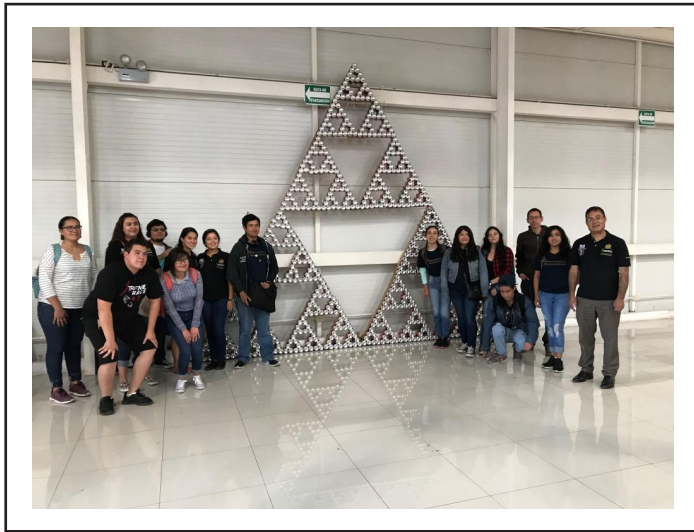
**Imagen 46.** Festival Matemático. Plaza “Miguel Auza”, Zacatecas, septiembre 2018



**Imagen 47.** Jornadas del Centro de Educación Media. Festival Matemático, UAA, Aguascalientes, noviembre 2018



**Imagen 48.** *Triángulo de Sierpinski. Jornadas del Centro de Educación Media. Festival Matemático. UAA, Aguascalientes, noviembre 2018*



**Imagen 49.** *Festival Matemáticas en la Calle. El Carmen, Nuevo León, octubre 2019*



***Imagen 50. Festival Matemáticas en la Calle. Salinas, Nuevo León, octubre 2019***



***Imagen 51. Jornadas del Centro de Educación Media. Festival Matemático. UAA, Aguascalientes, noviembre 2019***



**Imagen 52.** Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey, “Matemática Itinerante”, Festival Matemático en la Escuela Primaria “Francisco Berumen Varela”, Zacatecas, diciembre 2019



**Imagen 53.** Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey, “Matemática Itinerante”. Festival Matemático, Tlaltenango, Zac., enero 2020



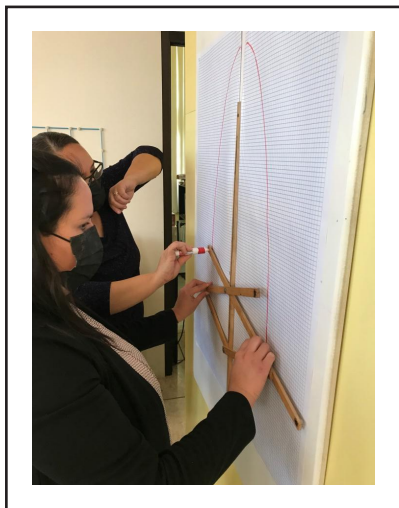
**Imagen 54.** Visita guiada, “Divermente”, durante la pandemia. MIIMaZ, mayo 2020



**Imagen 55.** Visita Guiada, Escuela Primaria “Ricardo Flores Magón”, durante la pandemia. MIIMaZ, abril 2021



**Imagen 56.** Curso “Cómo diseñar un club de matemáticas en mi escuela” con profesoras durante la pandemia. MIIMaZ, febrero 2022



**Imagen 57.** Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey, “Matemática Itinerante”. Festival Matemático, Instituto Cabot, Zacatecas, abril 2022



**Imagen 58.** Proyecto conjunto MIIMaZ y Consulado de los Estados Unidos en Monterrey, “Matemática Itinerante”. Festival Matemático, Escuela Primaria “Modelo”. Calera, Zac., mayo 2022



**Imagen 59.** Taller “Desafíos matemáticos para niñas y niños”. Biblioteca Central de la UAZ, Zacatecas, junio 2022



**Imagen 60.** Festival Matemático. Preparatoria III de la UAZ, Fresnillo, Zac.,  
septiembre 2022



**Imagen 61.** Noche de las estrellas. Quantum “Ciudad del Conocimiento”,  
Zacatecas, diciembre 2022



## Conclusiones

Este artículo ha tratado de trazar una línea histórica que ilustre el nacimiento y desarrollo del MIIMAZ. Poner de manifiesto su vocación: contribuir a la comunicación pública del conocimiento matemático en escenarios lúdicos tratando de favorecer el interés hacia las matemáticas en niñas, niños y jóvenes.

El MIIMaZ asume el reto lanzado por varios organismos internacionales que reconocen que la complementariedad entre la educación formal, no formal e informal es un desafío para la educación en general y para la educación matemática en particular. Convencidos de que es necesario que la educación escolar se apoye en las numerosas posibilidades de aprendizaje que hoy se ofrecen más allá de la escuela, subrayamos la importancia que tienen los escenarios de divulgación en el fortalecimiento de la educación escolar UNESCO (2011).

## Referencias

- Hernández, P. y Meléndez, H. (2003). MIIMaZ. Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas. Tesis de maestría no publicada. Zacatecas: Unidad Académica de Matemáticas, UAZ.
- Mandelbrot, B. (1977). The fractal geometry of nature. N.Y. W.H. Freeman and Company.
- UNESCO (2011). Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base. Recuperado el 3 de marzo, 2023, en: <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776F.pdf>.

## Sobre el Autor

Plácido Hernández Sánchez

Contacto: [placido.hernandez@uaz.edu.mx](mailto:placido.hernandez@uaz.edu.mx)

Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero.

Fundador del Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas.

Responsable del Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas.



## La mejor decisión para mi vida profesional

*Rebeca Valdes Hibel*

A lo largo de mi infancia y parte de mi adolescencia pasó por mi mente estudiar carreras como: educación, biología marina, enfermería y contaduría; pero, en cuarto semestre de bachillerato, cuando nos dejaron investigar cuáles eran las carreras que ofertaban las universidades de Zacatecas me enteré de la existencia de la Licenciatura en Matemáticas, a partir de ese momento tuve claro que quería estudiar ahí... porque otras carreras, por las que por un momento quise optar, tenían en común las matemáticas y eso me permitiría desarrollarme en donde quisiera. Fue así como afortunadamente tomé la decisión de estudiar matemáticas.

El primer reto al que diariamente me enfrenté fue subir a pie desde el boulevard hasta la Unidad de Matemáticas, como diría Sheldon Cooper “¡Bazinga!”. El reto principal fue ser perseverante y disciplinada, hubo momentos en los que la densidad de los temas fue abrumadora y pensé en dejar la carrera para replantearme si esto era para mí. Sin embargo, eso fue sólo una etapa y una vez que se supera se puede llegar a la meta. Por otra parte, la carrera me permitió afrontar los problemas al analizar cuál es la mejor alternativa para solucionarlos e incluso poder determinar que no existe una solución.

Algunas recomendaciones que les daría a las futuras generaciones de la Unidad Académica de Matemáticas sería llevar la idea clara de que para conseguir un objetivo hay que trabajar arduamente. En ocasiones

van a querer desistir, pero sólo serán momentos puntuales que no van a definir la tendencia de su paso por la universidad, pero si les dotarán de la perseverancia y disciplina para seguir superando los retos hasta llegar al final. Otra recomendación es no limitar el campo laboral o pensar que sólo pueden dar clases una vez que egresen de la carrera.

Finalmente, quiero compartir con el lector, algunas de las aportaciones que me dejó la Licenciatura en Matemáticas como profesionista y persona:

- » No perder las ganas de aprender.
- » Ser consciente de que en la universidad no te dan todos los conocimientos, pero sí te dotan de las herramientas necesarias para seguir desarrollándote y evolucionar.

### **Sobre la autora**

Rebeca Valdes Hibel

Egresada de la Licenciatura en Matemáticas en 2009.

Egresada de la primera generación Maestría en Matemática Educativa con orientación en Nivel Superior en 2014.

Docente de matemáticas en la Universidad Politécnica de Zacatecas (UPN) desde hace 11 años.

## **Mi experiencia académica por la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas**

*Irma Margarita Rodríguez Flores*

La elección de estudiar en la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) fue por la promoción que realizó la licenciatura en matemáticas en la preparatoria donde cursaba mis estudios, matemáticas fue la materia a la que le daba prioridad y, puesto a que tenía buenas calificaciones, decidí que quería continuar aprendiéndolas, pues conforme más las conocía más dudas me surgían y sabía que en dicha licenciatura, todas esas inquietudes, serían resueltas. Cabe mencionar que fue la única opción que me convencía para mi formación universitaria. En las siguientes imágenes muestro recuerdos con algunos compañeros de la Licenciatura.

**Imagen 1.** *Con algunos compañeros de la Licenciatura y con el Maestro Medel, 6to semestre, 2008*



**Fuente:** *fotografía propia.*

**Imagen 2.** *En las instalaciones de la Licenciatura con algunos compañeros, en la bienvenida de los de nuevo ingreso, 2008*



**Fuente:** <https://web.facebook.com/photo/?fbid=131279646918549&set=a.131277683585412>

Recuerdo que la primera semana de clases en la licenciatura nos pidieron como tarea demostrar por qué la raíz de dos es irracional, fue algo totalmente nuevo para mí, pues las matemáticas que conocía hasta el momento habían constado sólo de resolver problemas, como ecuaciones algebraicas o problemas de cálculo diferencial o integral, así que el tratar de realizar las demostraciones al inicio me costó trabajo a tal grado que pensé en salirme de la carrera, pues implicaba un grado de dificultad mayor al cual no estaba familiarizada. Afortunadamente no lo hice y consideré un reto realizar las demostraciones y con orgullo puedo decir ¡lo logré!, graduándome en junio del 2014.

*Imagen 3. Graduación de la Maestría en Matemática Educativa. Junio 2014*



*Fuente: fotografía propia.*

Sin embargo, hubo momentos complicados en el desarrollo de mis estudios y que vale la pena comentar. Por ejemplo, hay temas en matemáticas que se dificultan en específico y ocasionan desánimo, a tal grado que incluso hacen pensar que es mejor renunciar a la actividad matemática que se está tratando

de resolver. Recomiendo a los estudiantes que no lo dejen de intentar, pues de eso se trata la magia de las matemáticas, por más complicado que parezca un problema éste puede tener solución y en algún momento se encontrará, y si ésta no la tiene al menos ya se sabe por cuál camino no ir. Fue algo que aprendí de mis profesores de matemáticas.

**Imagen 4.** En CINVESTAV con compañeras de la maestría para el evento de la XV EIME. Diciembre 2012



**Fuente:** fotografía propia.

Considero que apoyo a los estudiantes de la licenciatura, que están realizando algún trabajo de investigación como parte de su proceso de aprendizaje y titulación, al dejar que acudan a observar algunas clases donde actualmente me desenvuelvo como profesora, además el hecho de ser reconocida y considerada por mis exprofesores creo que es porque recuerdan y conocen mi forma de trabajar como estudiante. Agradezco el reconocimiento de mi trabajo como profesional de la enseñanza de la matemática, es muy gratificante el compartir esta experiencia

académica, pues considero que apporto a la comunidad de la unidad de matemáticas y, en general, a los alumnos que estudian la orientación en la enseñanza de las matemáticas, así como las ventajas del esfuerzo y la dedicación de la misma.

*Imagen 5. Compañeros de la maestría en Matemática Educativa en la unidad de matemáticas, 2012*



**Fuente:** <https://web.facebook.com/photo.php?fbid=10152864694878194&set=t.1002573898&type=3>

**Imagen 6.** *En MIIMAZ en clase de modelación como parte de mi formación como estudiante de posgrado. Julio del 2013*



**Fuente:** <https://web.facebook.com/photo.php?fbid=559289010802493&set=t.1002573898&type=3>

En definitiva, el conocimiento aprendido en matemáticas me ha dado las herramientas para trabajar con seguridad y de manera profesional. Aunque, como todo, el inicio no fue fácil, pero al recordar, durante mi estancia en matemáticas, el compromiso de mis profesores y su profesionalismo, así como su calidad humana puedo decir que siempre me sentí como en casa. Además, me dejaron una cultura de trabajo de excelencia y saber que se pueden hacer las cosas con pasión y calidad, recalcando que la calidad es algo que distingue a la Unidad Académica de Matemáticas.

**Imagen 7.** Graduación de la Licenciatura en Matemáticas. Diciembre 2009



**Fuente:** fotografía propia.

**Imagen 8.** Taller de Matemática Educativa en MIIMAZ. Noviembre, 2019



**Fuente:** <https://web.facebook.com/photo.php?fbid=10157688250513194&set=t.1002573898&type=3>

Durante la Licenciatura asistí a varios congresos, recuerdo uno en Valle de Bravo y otro en Zacatecas (en el que me tocó ser parte del comité organizador). En la maestría participé en la XV EIME en Ciudad de México y en el último semestre realicé una estancia en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso en Chile, la cual fue una experiencia muy gratificante y de crecimiento profesional, pues el viajar a otro país y conocer las problemáticas del aprendizaje de las matemáticas y ver que son similares a las de México te deja reflexionando sobre seguir mejorando en nuestro trabajo como docentes.

*Imagen 9. En la Universidad Católica de Valparaíso en Chile, abril 2014*



Concluyo sobre esta narrativa recordando una de las celebraciones: el día del estudiante en la licenciatura en matemáticas, ya que los profesores siempre se esmeraban en hacernos sentir bienvenidos en un ambiente de calidez humana y familiar... recuerdo a los profesores reuniéndonos en un aula para cantarnos la canción "color esperanza" que interpreta Diego Torres. La canción representa un himno de superación

que alienta a que, a pesar de las adversidades, no dejemos de intentar lograr nuestro objetivo sea cual sea, porque con trabajo y determinación siempre se puede. ¡Muchas gracias, profesores!, por todas esas experiencias que quedarán en los recuerdos de todos los estudiantes que les admiramos.

### Sobre la Autora

Irma Margarita Rodríguez Flores

Contacto: [irodriguezf@ipn.mx](mailto:irodriguezf@ipn.mx)

Egresada de la Licenciatura en Matemáticas en 2009.

Egresada de la primera generación de la Maestría en Matemática Educativa en 2014.

Actualmente docente en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 18 “Zacatecas” del Instituto Politécnico Nacional (IPN).



## ¿Es buena idea estudiar Matemáticas?

*Luis Enrique Adame Martínez*

En el presente escrito quiero compartir las experiencias, dificultades y emociones que viví al estudiar la Licenciatura en Matemáticas.

Bienvenido, si estás leyendo esto es porque probablemente tengas interés y pasión por estudiar la carrera de Matemáticas o, simplemente que, por alguna otra razón, piensas que es la carrera ideal para ti, tal y como lo pensamos muchos antes de adentrarnos en la aventura de estudiar a una mayor profundidad esta hermosa ciencia. Espero que este breve panorama basado desde mi experiencia te sirva para aclarar un poco y confirmar que efectivamente es la carrera que deseas.

Primero hay que entender el cambio que hay al pasar del nivel bachillerato al nivel universitario. La mayoría de los que optamos por estudiar matemáticas creemos que ya sabemos mucho sobre matemáticas y que sólo queremos mejorar nuestras habilidades aritméticas, aprender más fórmulas para la solución de problemas, seguir siendo sobresaliente en el área, etc., pero con el primer golpe al que te enfrentas es que la noción que tenías de hacer matemáticas es distinta a lo que realmente es. Pues hasta la preparatoria, la mayoría sólo hemos hecho uso de las matemáticas, ya que hacer matemáticas va más enfocado a DEMOSTRAR con argumentos válidos que hipótesis matemáticas son o no verdad. ¡No te asustes!, todos pasamos por ello, en mi caso fue cuando una de mis docentes de primer semestre me dio esa dramática noticia.

Al inicio, puede que te cueste mucho adaptarte al nivel de licenciatura en esta carrera, pero con disciplina, perseverancia y esfuerzo se puede lograr. En mi caso, al inicio no subía del cero en mis exámenes semanales, pero lejos de bajar los ánimos, eso me motivó a mejorar mis hábitos de estudio y teniendo en cuenta que detrás de mis estudios estaba el esfuerzo de mis padres por sostener un estudiante universitario. Hay que tener en cuenta que, para sobrellevar la carrera de matemáticas, contar con amigos puede ayudar a formar equipos de estudio, pero también a través de la convivencia puede ser más ameno el curso de la carrera (Imagen 1). Otra manera de sobrellevar la carga emocional que conlleva el estudio es buscar uno o más pasatiempos extracurriculares. Por ejemplo: practicar algún deporte, aprender algún idioma, entrar a algún club (baile, ajedrez, lectura, etc.) y no pueden faltar las fiestas (pero con medida).

*Imagen 1. Compañeros de la licenciatura cursando los últimos semestres*



*Dato interesante: primer generación del nuevo plan de estudios E.*

Durante el curso de la carrera aprendí que es una ciencia que se presta mucho para la divulgación/difusión de temas de la amplia gama de áreas que hay dentro de la Matemática. Hay una enorme cantidad de escuelas, coloquios, congresos, etc., donde estas actividades se llevan a cabo en distintos lugares, no sólo dentro del estado o país, si no que algunos son internacionales. Y sí, claro que puedes participar en ellos, hay muchos apoyos para este tipo de eventos. En lo personal, fue algo de lo que más disfruté durante la licenciatura: conocer y convivir con nuevas personas con interés por las matemáticas, el intercambio de conocimiento e ideas por algunos temas en específico y por supuesto conocer nuevos lugares y culturas.

En la imagen 1 y 2 podemos observar dos de mis participaciones en dos diferentes congresos organizados por la Sociedad Matemática Mexicana. Por lo que, si decides estudiar matemáticas, aprovecha y ve al máximo número de eventos que te sea posible, no te arrepentirás.

*Imagen 2. XLIX Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, en la ciudad de Aguascalientes capital*



*En dicho evento se tuvo la participación en los talleres de divulgación matemática como parte del grupo Hipatia de la UAM-UAZ. Específicamente en la construcción y explicación del Omnipoliedro.*

**Imagen 3.** 51° Congreso Nacional de la Sociedad Matemática, que tuvo lugar en la ciudad de Villahermosa, Tabasco



*En dicho evento se tuvo la participación como ponente, dando a conocer los avances del proyecto de investigación realizado durante la licenciatura para la obtención del grado.*

Otra cosa relevante durante el paso por la licenciatura es ir identificando qué área de la matemática es la que te apasiona más, para, de esta manera, buscar especializarte con temas dentro de esa área y con el tiempo posiblemente trabajar tu investigación de titulación. En lo personal, yo me fui por el área de Matemática Aplicada y te comentaré el porqué. Siempre me interesó el saber cómo se conectaban las matemáticas con algunas otras disciplinas y tras hablar con algunos docentes del área, me atrapó la idea de: “poder entender el problema en un lenguaje no matemático, pasarlo al lenguaje matemático, darle solución con herramienta matemática y poder dar a conocer los resultados a personas que no son matemáticas”.

Mi paso por la licenciatura en Matemáticas fue una de las mejores decisiones y experiencias de mi vida, pues además de los conocimientos y lugares conocidos, me deja grandes amistades tanto del cuerpo estudiantil como del cuerpo docente a los cuales aprecio bastante. Espero haberte ayudado un poco en la duda existencial sobre la decisión de estudiar la carrera de matemáticas y si es así, te felicito estás a punto de conocer o mejorar la perspectiva que tenías de una de las ciencias más bellas de todas: las Matemáticas.

Sobre el autor

Luis Enrique Adame Martínez

Licenciado en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Zacatecas. Maestro en Ciencias con especialidad en Probabilidad y Estadística por el Centro de Investigación en Matemáticas, CIMAT.

Actualmente, especialista de tesorería en Fideicomisos Instituidos en Relación con la Agricultura (FIRA), donde se encarga de supervisión de flujo de dinero y operación SPEI, cálculos y análisis estadísticos, supervisión y atención de proyectos que involucren al área de tesorería con el fin de mejorar la operación de la institución.

Áreas de Interés: Finanzas, Automatización de Procesos VBA, Confiabilidad, Inferencia Estadística, Teoría de Gráficas.

# Capítulo 2: Divulgación

## **Matemática aplicada y matemáticas, el multifacético modelo de Gompertz**

*Juan Martínez Ortiz  
Leticia Adriana Ramírez Hernández  
Mayra Guadalupe García Reyna  
Jesús Adrián López  
Arturo Araujo Conejo*

### **Resumen**

El objetivo del presente trabajo es mostrar la eficacia y versatilidad del modelo sigmoïdal de Gompertz en el ajuste de curvas experimentales procedentes de diferentes fenómenos, a saber, la epidemia del VIH/SIDA en México de 1983 a 2020 y el reciente brote de SARS-CoV2 en México. Se debe destacar que algunos resultados expuestos han sido publicados parcialmente por los autores en revistas especializadas.

Palabras clave: sigmoïdal, Gompertz, Epidemia VIH/SIDA, SARS-CoV2

### **Introducción**

El modelo de Gompertz es empleado para el análisis de fenómenos de crecimiento poblacional o de cualquier otra índole bajo un espacio de recursos limitados. Para este tipo de fenómenos la gráfica de datos expe-

rimentales adopta la forma de una “S” elongada, caracterizándose esta curva por una pendiente inicial pequeña, seguida por un crecimiento exponencial; y, después, una estabilización lenta del crecimiento. Son diversos los fenómenos que presentan semejante comportamiento: crecimiento de poblaciones de bacterias, crecimiento de cierto tipo de tumores cancerígenos, crecimiento de ciertos organismos vivos, entre otros. Los modelos matemáticos que describen el comportamiento de crecimiento mencionado se denominan sigmoidales.

En este trabajo se emplea el modelo sigmoidal de Gompertz de tres parámetros para la descripción de curvas de las epidemias del VIH/SIDA y el brote de SARS-CoV2 en México. Existen otros usos del modelo en donde se ha dejado evidencia de su versatilidad: la proliferación in vitro de células cancerígenas tipo HeLa en función de la aplicación de suero bovino fetal a diferentes concentraciones (Ramírez et al., 2015) y el crecimiento de tumores cancerígenos en cerebro (López et al., 2019).

## Desarrollo

En 1825 el matemático inglés Benjamín Gompertz (1825) propuso un modelo demográfico basado en la suposición a priori de que la resistencia de una persona a la muerte disminuye a medida que aumenta su edad. Hoy en día, la versatilidad del modelo de Gompertz ha permitido su empleo en la descripción de diversos procesos de crecimiento limitado, por ejemplo, en demografía (Bongaards, 2005), biología (Wheldon, 1988), medicina (Bajzer & Vuk-Pavlovic, 2000) y, en particular, en el crecimiento de organismo, órganos, tejidos y tumores (Weldon, 1988; Bajzer & Vuk-Pavlovic, 2000; Norton, 2005; Laird, 1964). Además, se ha postulado la existencia de un carácter dual, fractal y estocástico de la ecuación de Gompertz (Waliszewski & Konarski, 2002, 2003; Izquierdo-Kulich & Nieto-Villar, 2008).

La ecuación diferencial, conocida como ley de crecimiento de Gompertz, que describe los distintos casos citados tiene la forma:

$$\frac{dG(t)}{dt} = -bG(T)\ln(G(t)/K),$$

donde  $G(t)$  indica el tamaño de la población existente de un determinado organismo o el crecimiento de una característica del mismo (por ejemplo, peso o talla), en un tiempo establecido  $t$ , que puede ser expresado en minutos, horas, días, meses o años, según el caso. El parámetro  $b$  es la tasa intrínseca de crecimiento y  $K$  es la capacidad de carga, esto es, el máximo valor que alcanzaría  $G(t)$  durante el proceso estudiado. La ecuación de Gompertz puede resolverse explícitamente y su solución es:

$$G(t) = Ke^{-ae^{-bt}}$$

donde  $a = \ln\left(\frac{K}{G_0}\right)$ , siendo  $G_0$  el valor de la variable  $G(t)$  en el momento inicial. La gráfica de  $G(t)$  es una curva sigmoidal asimétrica respecto a su punto de inflexión.

El estudio de la epidemia VIH/SIDA a través de un modelo de crecimiento, como lo hacemos en este trabajo, es interesante y novedoso por sí mismo, ya que habitualmente las investigaciones sobre el tema giran en torno a la dinámica de transmisión del SIDA y emplean modelos epidemiológicos, como son los modelos S-I (Mesa-Mazo, Vergaño-Salazar, Sánchez – Botero & Muñoz-Loaiza, 2010) y S-I-R (González & Quintero, 2002). En 1997, Horimoto (et al., 1997) realizaron un estudio de la población VIH positiva en Japón empleando una ecuación localmente modificada de Gompertz, para ello contaron con tan sólo diez datos (del año 1985 a 1994).

En nuestro caso, se consideran los datos de casos diagnosticados de SIDA para México reportados por el Centro Nacional para la prevención y control de VIH/SIDA (CENSIDA, 2020) en el periodo de 1983 a 2020. Los resultados actualizados de una investigación previa sobre este tema (Ramírez et al., 2015) arrojaron un buen ajuste con alta correlación de datos.

El coronavirus es un grupo de virus que causan enfermedades que van desde el resfriado común hasta enfermedades más graves como

neumonía, síndrome respiratorio de Oriente Medio (MERS) y síndrome respiratorio agudo grave (SARS). La cepa de coronavirus (2019-nCoV) es la causante de la alerta epidémica mundial que se vivió de 2021 a 2024: el llamado virus SARS-CoV2, responsable de la enfermedad infecciosa COVID-19. La enfermedad fue reportada por primera vez el martes 7 de enero de 2020, por el Centro para el Control y la Prevención de Enfermedades (CDC) de China, [Organización Mundial de la Salud (OMS), 2020]. El primer caso de COVID-19 en México, se detectó el día 27 de febrero de 2020, en Ciudad de México; un mes después se tenían casos en todos los estados de la República Mexicana. Hasta el 30 de noviembre del 2021 (1 año, 9 meses y 3 días después de este primer diagnóstico), el número de pacientes aumentó exponencialmente, alcanzando un total de 3,877,873 casos confirmados; 294,246 (7.59%) defunciones y 3,245,219 (83.68%) recuperados de COVID-19. La dinámica de los casos acumulados por esta epidemia sigue un crecimiento sigmoïdal tipo Gompertz.

## **Materiales y métodos**

### *Epidemia VIH/SIDA*

La información sobre casos diagnosticados de SIDA en México fue obtenida del Manual de vigilancia epidemiológica de casos de VIH/SIDA en México. Registro nacional de casos de SIDA. Actualización al cierre de 2020 (CENSIDA, 2020).

### *Brote de SARS-CoV2*

La Dirección General de Epidemiología puso a disposición de la población en general la información contenida en los Anuarios Estadísticos de Morbilidad 2015-2017, así como la información referente a los casos positivos asociados a COVID-19, que se actualiza diariamente, a través de su página\*.

---

\*. <https://datos.covid-19.conacyt.mx/>

Para el presente trabajo, se consideran los datos de febrero 2020 a diciembre 2021.

Enseguida se describen los principales hallazgos en los ajustes y su relevancia.

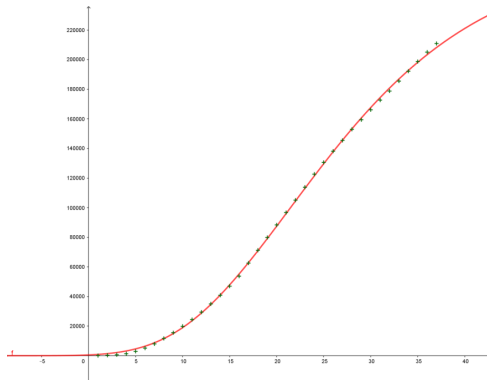
## Epidemia VIH/SIDA

El mejor ajuste sigmoideal (con  $R^2=0.9997$  que es coeficiente de determinación y que indica la bondad de ajuste del modelo a la variable  $G(t)$ ) es modelo de Gompertz :

$$G(t)=271,349.2 e^{-6.250194e^{-0.08545278 t}}$$

En la Figura 1 se muestra el ajuste del modelo; en el eje de las ordenadas se ubica el número de casos diagnosticados acumulados de SIDA; mientras que en el eje de las abscisas los valores de la variable independiente (tiempo, en años) espaciados uniformemente.

**Figura 1.** Casos diagnosticados acumulados por año de SIDA en México, de 1983 a 2020, y su ajuste mediante un modelo de Gompertz (+ Datos reales, - Ajuste)

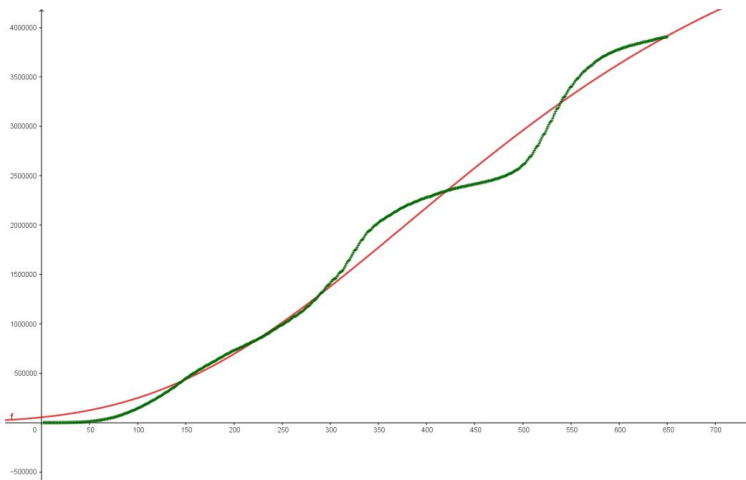


## COVID-19

El mejor ajuste sigmoïdal (con coeficiente de determinación  $R^2=0.9667$ ) se obtiene con el modelo de Gompertz (Figura 2).

$$G(t)=3319817e^{7.360314773758e^{-0.337999t}}$$

**Figura 2.** Ajuste tipo Gompertz para casos acumulados de COVID-19 en México, de febrero 2020 a diciembre 2021 (+ Datos reales, - Ajuste)



## Relevancia de los resultados

El modelo de Gompertz ha mostrado su versatilidad al estar presente como un modelo de buen ajuste en fenómenos de crecimiento que tienen la característica de iniciar extremadamente rápido y que, a partir de un momento en el que se alcanza el valor máximo para  $(dG(t))/dt$ , el crecimiento sufre una desaceleración que lo conduce eventualmente a su estabilidad.

Este modelo permite hacer aseveraciones precisas en cuanto a la naturaleza del fenómeno de crecimiento, y éstas sobrepasan cualitativamente a aquellas hipótesis que pudieran surgir de metodologías puramente estadísticas. En los análisis epidemiológicos se puede determinar la duración de la fase de crecimiento óptimo, la tasa de crecimiento en ese momento, así como la capacidad de carga del medio (número máximo de contagios esperados), e incluso, se puede hacer una comparación cualitativa entre dos poblaciones a través de comparar, únicamente, los valores de los parámetros involucrados en el modelo ( $a$ ,  $b$  y  $K$ ), sin considerar los tamaños poblacionales.

## Referencias

- Bajzer, Z., & Vuk-Pavlovic, S. (2000). "New dimensions in Gompertzian growth". *Journal Theoretical Medicine*, 2: 307-315.
- Bongaards, J. (2005). "Five period measures of longevity". *Demographic Research*, 13: 547-558.
- CENSIDA (2020). "Vigilancia epidemiológica de casos de VIH/SIDA en México". Registro Nacional de casos de SIDA. CENSIDA 2020. De: <http://censida.salud.gob.mx> (consultado 25 de noviembre de 2020).
- Córdova Villalobos, J., A.; Ponce De León Rosales, S., & Valdespino, J. L. (Editores). (2009). 25 años de SIDA en México. Logros, desaciertos y retos. 2ª Edición, Instituto Nacional de Salud Pública, México.
- Gobierno de México (2021). COVID-19 en México. Tablero de datos CONACyT. De: <https://datos.covid-19.conacyt.mx/> (consultado 4 de diciembre de 2021).
- Gompertz, B. (1825). "On the Nature of the function Expressive of the law of human mortality, and on new mode of determining the value of life contingencies". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115: 513-583.
- González, P., A., Quintero, J., R. (2002). Un modelo de VIH/SIDA con reinfección. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 10(2): 67-83.

- Horimoto, K., Hofuku, I., Oshima, K. (1997). "Population dynamics of HIV positive by application of a locally modified Gompertz curve: a case study for Japan". *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*. 30 (2): 985-993.
- Izquierdo-Kulich, E. & Nieto-Villar, J. M. (2008). Morphogenesis of the tumor. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 5(299): 299-313.
- Laird, A., K. (1964). "Dynamics of tumor growth". *British Journal of Cancer*, 18: 490-502.
- López J.; Ortíz J., & Ramírez, L. (2019). Caracterización de tumores de acuerdo a su morfología, *Memorias del Congreso Internacional de Investigación Academia Journals Morelia 2019*. Elibro Online con ISSN 1946-5351, Volumen 11, No. 2.
- Mesa-Mazo, M. J.; Vergaño-Salazar, J. G.; Sánchez-Botero, C. E., & Muñoz-Loaiza, A. (2010). "Modelo matemático para la transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa". *Revista de Salud Pública*, 12 (2): 308-316.
- Organización Mundial de la Salud (OMS). (2020). Organización Mundial de la Salud. Coronavirus. De: [https://www.who.int/es/health-topics/coronavirus#tab=tab\\_1](https://www.who.int/es/health-topics/coronavirus#tab=tab_1)(consultado 2 de diciembre de 2020)
- Ramírez, L.; Martínez, J.; López, J., & García M. (2015). El modelo de Gompertz como herramienta hacia la investigación multidisciplinaria en Ciencias de la Salud. *Memorias Congreso Internacional de Investigación Científica Multidisciplinaria 2015*. Tecnológico de Monterrey.
- Waliszewski, P. & Konarski, J. (2002). Neuronal differentiation and synapse formation in space-time with fractal dimension. *SYNAPSE*, 43: 567-572.
- Waliszewski, P. & Konarski, J. (2003). The Gompertzian curve reveals fractal properties of tumor growth. *Chaos, Solitons and Fractals*, 16: 665-674.
- Wheldon, T. E. (1988). *Mathematical models in cancer research*. IOP Publishing Ltd., Bristol. Dicotopografía.

## **Sobre los autores**

*Juan Martínez Ortiz*

Doctor en ciencias físico-matemáticas por la Universidad Estatal de San Petersburgo, Federación Rusa.

Docente-Investigador desde 1992 de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Actualmente trabaja en la Unidad Académica de Matemáticas de la misma universidad.

*Leticia Adriana Ramírez Hernández*

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Doctora y Maestra en Ciencias Aplicadas por la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Docente-Investigadora desde enero de 2006 en las Unidades Académicas de Ciencias Biológicas y de Matemáticas de esa misma universidad.

*Mayra Guadalupe García Reyna*

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Maestra en Ciencias Nucleares.

Doctora en Energías Renovables.

Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, nivel Candidato a Investigador, desde 2022.

*Jesús Adrián López*

Doctor en Ciencias por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Docente-Investigador en la Unidad Académica de Ciencias Biológicas desde 2011.

Miembro del Sistema Nacional de Investigadores desde el año 2013 nivel C y nivel 1 desde 2018 a la fecha.

*Arturo Araujo Conejo*

Maestro en matemáticas aplicadas por la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Maestro en Ciencias Médicas por la Universidad de Guanajuato.

Médico Cirujano Dentista por la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Actualmente es Coordinador de Investigación en los servicios de salud de Zacatecas.

## Fractales que caminan sobre fractales

*Andrea Arlette España Tinajero*

### Resumen

En este artículo se explora la difusión de gotas de tinta derramadas dentro de un contenedor casi lleno de agua que tiene forma toroidal (de dona). Conforme pasa el tiempo la tinta se va disolviendo en el agua hasta que la concentración de la mezcla es igual en cada unidad de volumen, en otras palabras, hasta que llega al consenso. Considerando el mismo contenedor y la misma cantidad de agua dentro de él, nos interesa saber las diferentes formas en las que se llega al consenso de concentración, tomando en cuenta los distintos lugares donde se arrojan las gotas de tinta.

La exploración se basa en una codificación binaria de las posibles configuraciones iniciales de las gotas de tinta, además de dos reglas de evolución que dependen de la dinámica del flujo que siguen en su camino hacia el consenso, debido a la forma especial del contenedor. De esta forma, se construyen sucesiones de códigos binarios, las cuales se organizan en un grafo al que llamamos diagrama de transición. Al aumentar la dimensión, vemos que estos diagramas forman patrones fractales debido a su generalización en forma recursiva.

---

\*. En este artículo el tipo de citación corresponde al empleado en el área de matemática educativa.

## El fenómeno de la difusión

Cuando cae una gota de tinta dentro de un vaso con agua es posible observar como los pigmentos se van dispersando por todo el contenedor. Teniendo un poco de paciencia, después de algunos instantes, podremos observar que todo el contenido del vaso ha adquirido el color de aquella gota, tal vez un poco más tenue.

Éste es uno de los ejemplos visuales y más representativo sobre el fenómeno de difusión, en este caso en un medio líquido [5].[7] A la pequeña gota de tinta la llamaremos soluto y al gran volumen de agua solvente. Más aún, este fenómeno también puede ser visto en otro tipo de sustancias que tengan otro estado de la materia, por ejemplo: en gases. Al salir de la regadera, después de haber tomado un buen baño de agua caliente, podemos observar como todo el salón queda repleto de vapor, aunque sólo se haya utilizado un pequeño espacio para tomar la ducha este gas invade todos los rincones del cuarto. En este ejemplo, el vapor de agua (soluto) se esparció en el aire (solvente) que, como sabemos, está compuesto en su mayoría de nitrógeno, oxígeno y otros gases en menor proporción.

Teniendo un punto de vista microscópico, el proceso de difusión se debe al movimiento de las partículas en el cual cubren uniformemente el espacio que las contienen. Es bien sabido que las partículas permanecen en movimiento constante, definido por algunos como errático y por otros como aleatorio, conocido como movimiento browniano, debido a las observaciones sobre partículas en suspensiones acuosas, del botánico escocés Robert Brown (1773-1858), de las cuales afirmó: “mientras examinaba la forma de estas partículas sumergidas en el agua, observe que muchas de ellas se movían muy evidentemente... estos movimientos fueron tales que me convencieron, después de repetidas observaciones, de que no surgían de corrientes en el fluido, ni de su evaporación gradual, sino que pertenecían a la partícula misma” [5]. Al enlistar las posiciones de las partículas en intervalos de tiempo muy cortos cada segmento lineal de la trayectoria tomará una forma poligonal, similar a la trayectoria completa, ésta es la descripción de una línea (o curva) fractal [4].

Por otro lado, debido a la gran curiosidad que genera el proceso de la difusión, grandes científicos han dedicado su vida a su descripción y caracterización. En este sentido, se postularon ecuaciones matemáticas que predicen cómo, a través del proceso de difusión, la concentración de una sustancia en un medio (en otras palabras, la abundancia de un constituyente dividido por el volumen total de una mezcla) cambia con respecto al tiempo. En particular, la segunda ley de Fick, introducida por el médico y psicólogo alemán Adolf Fick (1829-1901) en 1855 [3], establece lo siguiente:

$$-\frac{\partial t}{\partial \varphi} = D \Delta \varphi. \quad (1)$$

Si se consideran dos dimensiones, la función de concentración puede interpretarse como  $\varphi = \varphi(x, t)$ , que en este caso depende de la posición  $x$  y el tiempo  $t$  (es importante recalcar que la función de concentración puede definirse en más dimensiones). Además,  $D$  representa el coeficiente de difusión y  $\Delta = \nabla^2$  es el operador Laplaciano (la divergencia del gradiente de  $\varphi$ ). Entrando un poco en detalles, *el gradiente de una función* de varias variables (en este caso refiriéndose a  $\nabla \varphi$ ) es una medida de la tasa de cambio de esa función en diferentes direcciones, uno se lo puede imaginar como una flecha que apunta en la dirección donde la función crece más rápido. Intuitivamente, si nos moviéramos en la dirección del gradiente, la función aumentará más rápido que en cualquier otra dirección.

Ahora, enfocándonos hacia lo que es la *divergencia* (operador que toma como entrada un campo vectorial y produce una función de varias variables), en este caso, refiriéndose a  $\Delta \varphi$  es una medida que muestra qué tan “separadas” están las líneas de flujo de un campo vectorial en un punto determinado. Nos podemos imaginar al campo vectorial como un conjunto de flechas que indican la dirección y la magnitud de algún fenómeno físico, como el flujo de un fluido. En este sentido, la divergencia mide la cantidad de flujo que entra o sale de un punto en particular. Por otro lado, el *coeficiente de difusión* es un valor que indica la facilidad

con que cada soluto se mueve en un solvente, el cual puede depender de diversos factores, por ejemplo, en la forma del soluto, la viscosidad del solvente, la temperatura, entre otros. Un ejemplo muy claro es al utilizar agua caliente al prepararse una taza de té, la temperatura del agua permite que la esencia herbal se impregne con más facilidad, en contraste de lo que sucede cuando el agua es fría.

Entonces, al considerar los dos ejemplos de difusión en estados de la materia distintos, es decir, el líquido (tinta-agua) y gaseoso (vapor-aire), podemos notar que este proceso se puede llevar a cabo tanto en un vaso cilíndrico como en la sala cúbica, por lo que sería natural deducir que la difusión puede ocurrir independientemente de la forma del recipiente que contenga a las mezclas, siempre y cuando haya una manera de transportarse a cada rincón del contenedor.

Otra observación interesante es que, cuando la gota de tinta ha coloreado toda el agua, lo hace de manera uniforme, es decir, la cantidad total de tinta queda igualmente repartida entre todas las unidades de volumen del contenedor. A este fenómeno se le conoce como consenso, que significa llegar a un acuerdo sobre una cierta cantidad de interés que depende del estado de todas las componentes del sistema [7], en este caso particular, las componentes del sistema son las unidades de volumen que tiene el contenedor.

Las componentes del volumen de un sistema pueden relacionarse entre ellas dependiendo de sus adyacencias, es decir, identificando una organización geométrica entre los vecinos de cada componente. Es posible establecer cada componente como un vértice  $v$  y a cada pareja de componentes adyacentes como una arista  $(u,v)$  las cuales definen un grafo específico  $G=(V,E)$ , donde  $V$  es su conjunto de vértices y  $E$  su conjunto de aristas. De esta forma, el cambio en la concentración de cada componente  $\varphi_v$  depende las conexiones que existan en el grafo  $G$ . Al integrar estas interacciones en la ecuación de difusión, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones diferenciales acopladas sobre  $G=(V,E)$ , también conocido como el flujo Laplaciano, en el que, por simplicidad, se omitirá la escritura explícita del coeficiente de difusión.

$$\frac{d\varphi_v}{dt} = \sum_{u \in V: (u,v) \in E} (\varphi_u - \varphi_v), \quad (2)$$

Una manera conveniente de escribir este sistema para resolverlo de forma analítica es considerando el operador laplaciano  $L: \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ , donde  $|V|=N$ , aplicado a la matriz de adyacencia del grafo  $G=(V,E)$ ,  $M_G$ . Recordemos que en una matriz de adyacencia, las filas y las columnas representan los vértices del grafo, y cada componente de la matriz representa una arista entre dos vértices, es decir, si existe una arista entre los vértices  $i$  y  $j$ , entonces la componente  $(i,j)$  de la matriz tendrá el valor 1; de lo contrario, tendrá el valor 0. Entonces, es posible escribir al operador laplaciano de la siguiente forma:

$$L(M_G) = M_G - \text{Deg}(M_G), \quad (3)$$

En este caso, la función  $\text{Deg}: \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  aplicada sobre una matriz de adyacencia, arroja una matriz cuyos únicos elementos distintos de cero se encuentran en la diagonal, y adquieren su valor debido al grado de cada vértice, es decir, al número de aristas  $(u,v)$  que empiezan o terminan con un vértice  $v \in V$ . A la nueva matriz  $L(M_G)$  se le referirá como matriz laplaciana de  $G$ . Con esta forma matricial, es posible reescribir la Ecuación (2) como:

$$\frac{d\varphi}{dt} = L(M_G) \varphi. \quad (4)$$

Debido a que la Ecuación (4) es lineal, para cada condición inicial  $\varphi(0) \in \mathbb{R}^N$ , su solución se escribe de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = e^{tL(MG)}\varphi(0).$$

Por otro lado, es sencillo verificar que la matriz laplaciana de cualquier grafo no dirigido es simétrica [7], por lo que  $L(M^G)$  es diagonalizable, en particular, sobre la base propia  $B_{L(M^G)} := \{v_1, v_2, \dots, v_N\} \subset \mathbb{R}^N$ . Se aprovechará este hecho para escribir el flujo de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^N \langle v_i | \varphi(0) \rangle e^{t\lambda_i v_i} \quad (5)$$

En la Ecuación (5), cada  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  representa un valor propio correspondiente al vector propio  $v_i$ . En vista de las dependencias establecidas en la Ecuación (5), se concluye que para conocer el flujo del sistema difusivo definido sobre un grafo determinado  $G$ , hay que resolver el sistema propio de su matriz laplaciana  $L(M_G)$ , es decir, conocer sus valores y vectores propios. A pesar de que este proceso debe realizarse específicamente para cada grafo  $G$ , hay características generales que se cumplen para todos los grafos, por ejemplo, la existencia del valor propio  $\lambda_N = 0$ , asociado al vector propio constante, es decir, al generado por  $(1, 1, \dots, 1)$ , tal que los valores propios se ordenan de la siguiente manera:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ , donde el número de componentes conexas de  $G$  indicará la multiplicidad algebraica de 0 [7, 9]. Este orden en el espectro del Laplaciano es el motivo de que en la Ecuación (5) cuando  $t \rightarrow \infty$  todos los sumandos tiendan a cero a excepción de los que están asociados con el valor propio  $\lambda_N$  y de esta forma ocurra el consenso.

Es importante recalcar y puntualizar que la matriz laplaciana  $L$  de un grafo  $G$  en la Ecuación (4), realmente captura la misma idea que un operador laplaciano para funciones continuas y de varias variables como en la Ecuación (1). El punto de partida es pensar que los vértices en un grafo y los puntos en un plano son análogos y la idea es ver a los operadores de Ecuación (1) en la Ecuación (4). Enfocándonos prime-

ro en el gradiente, recordemos que como ya se mencionó, el gradiente de una función nos dice intuitivamente en qué dirección y cuánto está cambiando una función en cada punto.

El análogo de un grafo es (refiriéndose a la dirección) el conjunto de aristas entre los vértices y (refiriéndose a la magnitud) la diferencia en los valores de una condición inicial en las posiciones de los dos vértices. Enfocándonos ahora en la divergencia, recordando que mide la cantidad de “flujo” que entra y sale de cada punto y dado que los puntos son análogos los vértices y los vectores alrededor de cada punto son análogos a las aristas adyacentes a cada vértice, la divergencia resulta ser la suma de las magnitudes que están conectadas con cada vértice (esta oración es básicamente la lectura de la Ecuación (4), para más detalles véase [1]).

## Difusión dentro de un contenedor toroidal

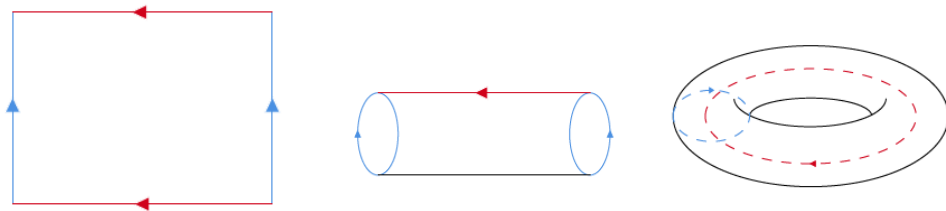
Geométricamente, un toro es una superficie que puede describirse de diversas maneras. Por los fines didácticos de este artículo se usará una descripción simplista. En primer lugar, tómese una lona (un trozo de tela, que para los fines de este experimento mental tiene que ser impermeable) rectangular, extiéndase en el suelo e identifíquese los dos pares de lados paralelos como se indica en la Figura 1. Posteriormente, péguese una pareja de lados, como se muestra en la Figura 2. Por último, péguese la pareja de lados paralelos faltante, como se muestra en la Figura 3, nótese que esta construcción es plana y no cabe en  $\mathbb{R}^3$  sin arrugarse. Soplando fuertemente dentro de la lona para que quede extendida y sin ninguna arruga, veremos una superficie tridimensional llamada toro, a la que coloquialmente se le conoce como dona (sí, exactamente a la pieza de pan que se le parece).

A continuación, explicaremos el proceso de difusión en un contenedor que tiene esta forma. Al conseguir este recipiente tan particular, lo llenaremos casi totalmente con agua y se arrojarán gotas de tinta en diferentes secciones para observar cómo es que se llega hacia el consenso. En este caso, las unidades de volumen que serán consideradas son las “rebanadas” del toro, es decir, las secciones delimitadas por cir-

cunferencias azules como la de la Figura 3, que vienen dadas por líneas verticales de la Figura 1. El número de rebanadas será la dimensión  $N$  y, además, podremos observar que cada una de ellas tiene únicamente dos vecinos, uno a la izquierda y otro a la derecha. Al traducir estas adyacencias en términos de grafos, obtenemos el grafo ciclo  $C_N$ , que se compone de  $N$  vértices y  $N$  aristas de modo que  $N \geq 3$ . Este grafo también lo podemos imaginar como si cada vértice fuera una niña o un niño que tomados de las manos forman un círculo.

**Figura 1.** Identificación de lados paralelos **Figura 2.** Pegado de extremos rojos

**Figura 3.** Pegado de extremos azules



Como se estableció en la sección anterior, para conocer el flujo del sistema difusivo, basta con conocer el sistema propio de la matriz laplaciana del grafo particular. Como un primer paso en este sentido, la Ecuación (7) muestra el cálculo de la matriz laplaciana asociada al grafo ciclo  $C_N$ .

$$L(M_{c_N}) = M_{c_N} - \text{Deg}(M_{c_N}).$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Los valores propios de  $L(M_{c_N})$  pueden ser calculados de forma exacta que, sin ahondar en muchos detalles, se debe a que los renglones de matriz  $L(M_{c_N})$  se pueden obtener aplicando una o varias veces la permutación que mueva las coordenadas del renglón un lugar a la derecha, por lo que se puede aplicar un método que utiliza la transformada discreta de Fourier (véase [8] para detalles del método). A continuación, se presenta el conjunto de todos sus valores propios asociados [6], llamado espectro al cual denotaremos por  $\text{Spec}(L(M_{c_N}))$ :

$$\text{Spec}(L(M_{c_N})) = \{2(\cos(\frac{2\pi i}{N}) - 1) : 1 \leq i \leq N\}. \tag{7}$$

Como podemos observar en la Ecuación (7) todos los valores del espectro de  $L(M_{c_N})$  son negativos o cero. Por otra parte, los vectores propios de  $L(M_{c_N})$  también pueden ser obtenidos de manera exacta, como se muestra a continuación [6]. Para cada valor propio  $\lambda_i$ , la coordenada  $j$ -ésima del  $i$ -ésimo vector propio asociado es:

$$v_{ij} = \cos\left(\frac{2\pi i j}{N}\right). \quad (8)$$

Los cuales resultan ser ortogonales. Además, cabe señalar que el N-ésimo vector propio será muy importante y es por eso que se muestra explícito a continuación:

$$v_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Por otra parte, de nuestros cursos de álgebra lineal, sabemos que cualquier condición inicial  $\varphi(0) \in \mathbb{R}^N$  puede ser escrita como combinación lineal de una base  $\{v_i\}_{i=1}^N$ , y algunos coeficientes  $a_i \in \mathbb{R}$ , donde  $1 \leq i \leq N$ . Si consideramos su escritura en la base canónica  $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^N$ , entonces  $\varphi(0) = \sum_{i=1}^N a_i \bar{e}_i$ . Además, en este caso se aprovechará la base propia descrita en la Ecuación (8). Los coeficientes asociados a esta segunda base, claramente son distintos a los de la base canónica y se escribirán  $a_i \in \mathbb{R}$  donde  $1 \leq i \leq N$ . En particular, el N-ésimo coeficiente es  $\varphi(0) = \sum_{i=1}^N a_i$ .

Al sustituir los valores del espectro de la Ecuación (7) en la solución al flujo laplaciano expuesta en la Ecuación (5), se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} \alpha_i v_i, \\ & \text{floor}\left(\frac{N-1}{2}\right) \\ &= \alpha N v N + \sum_{i=1} e^{\lambda_i t} (\alpha_i v_i + \alpha_{N-i} v_{N-i}) + e^{\lambda_{i^*} t} \alpha_{i^*} v_{i^*}. \end{aligned} \quad (10)$$

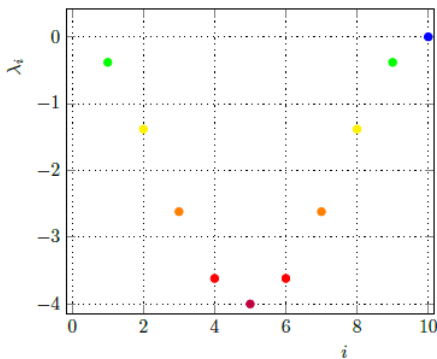
En este caso, el término  $i^*$  aparece únicamente cuando la dimensión  $N$  es par, además está definido como  $i^* = \frac{N}{2}$ . En la Figura 4 se muestra un ejemplo de los valores del espectro de  $L(M_{C_N})$  cuando  $N=10$ , y en la Figura 5 se muestran las velocidades del flujo asociado a cada vector propio  $v_i$ , es decir,  $e^{\lambda_i t}$ . En este caso, la correspondencia de las velocidades está indicada con colores, es decir, el color del valor propio en Figura 4 es el valor de la función del color correspondiente en la Figura 5. En este caso, únicamente cuando  $i^*=5$  e  $i = 10$  las funciones son únicas, mientras que para las demás, hay dos valores propios  $i$  y  $N-i$  con la misma función asociada. Por otro lado, considerando  $N = 11$ , únicamente cuando  $i = 11$  sucede que el valor propio asociado no repite su velocidad con ningún otro índice, como se puede observar en las Figuras 6 y 7.

Estas distinciones en la paridad de la dimensión, que parecen ser muy sutiles, generan diferentes patrones para estudiar las velocidades en su camino hacia el consenso. Por otra parte, de la Ecuación (10), podemos observar que la concentración siempre tiende al promedio con respecto a la cantidad de rebanadas, es decir,

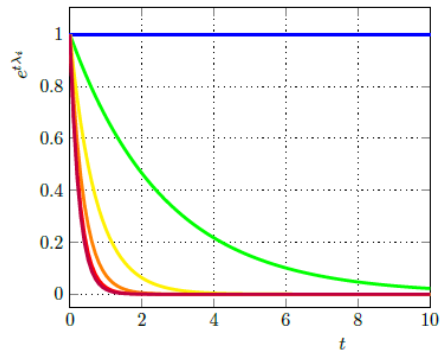
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{\alpha N}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como se observa en las Figuras 5 y 7, la N-ésima componente tiene desde el inicio el valor del consenso. La variación que sufre el flujo está en las demás componentes, por lo que hay que esperar la cantidad suficiente de tiempo ( $t$ ) para que los coeficientes asociados a los demás vectores propios tiendan a cero. En la siguiente sección se propone una codificación para observar la manera en la que los coeficientes se van “apagando” hasta que el flujo llega a un valor constante.

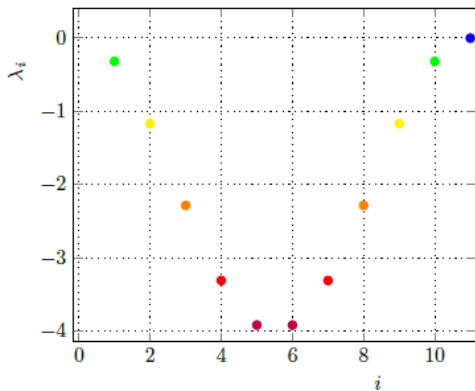
**Figura 4.** Valores propios de  $L(C_{10})$



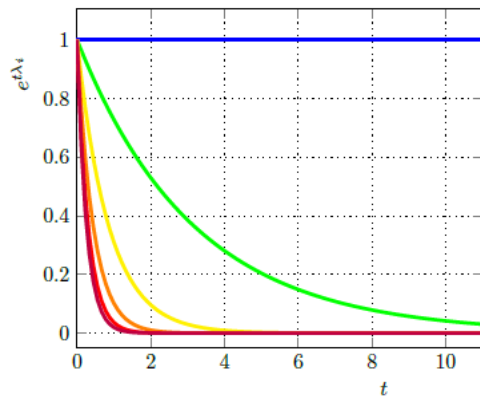
**Figura 5.** Velocidades en  $N=10$



**Figura 6.** Valores propios de  $L(C_{11})$



**Figura 7.** Velocidades en  $N=11$



## Codificación del grafo ciclo en la base propia

Haciendo uso del cálculo explícito del flujo del sistema Laplaciano sobre el grafo ciclo en la base propia (establecido en la Ecuación (10)) es posible proporcionar una codificación en la cual se concentre la información acerca de los estados por los que pasan las unidades de volumen del toro hasta llegar al consenso. Este tipo de codificaciones se han hecho para otros tipos de grafos y se puede consultar más información en [2].

Una de las formas en las cuales se pueden representar los posibles estados de un sistema es mediante los vértices de un diagrama de transición  $T(C_N)=(V,A)$  cuyo conjunto de aristas está compuesto por parejas ordenadas  $(u,v) \in A$  que definen la evolución de un estado a otro, al tener una dirección en específico, a este tipo de aristas se les llaman flechas. En este diagrama se representa cuando los flujos estén “encendidos” (representado por un 1) y “apagados” (representado con un 0), dependiendo de sus coeficientes asociados.

Para la siguiente definición se considerará un umbral especial  $\epsilon > 0$  de modo que sea posible registrar exactamente en qué tiempos  $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{N-1}$  las velocidades de las componentes del flujo difusivo de una condición inicial  $\varphi = \varphi(0) \in \mathbb{R}^N$  sobre el grafo cíclico (mostrado en la Ecuación (10)), se encuentran a una distancia menor que  $\epsilon$  de cero. De esta forma es posible observar un orden en el cual las componentes de  $\varphi$  se apagan en tiempo finito. Tómese el primer tiempo  $t_1 > 0$  del registro y bajo esta idea, a cada condición inicial  $\varphi$  se le asocia un código  $C\varphi \in \{0,1\}^{N-1}$ , cuyas coordenadas (denotadas en este caso por  $C\varphi(j)$  para la  $j$ -ésima coordenada), se definen como sigue a continuación:

$$C\varphi(j) = \begin{cases} 1, & \alpha_{N-j} e^{t_1 \lambda_{N-j}} \geq \epsilon, \\ 0, & \alpha_{N-j} e^{t_1 \lambda_{N-j}} < \epsilon, \end{cases} = \text{donde } 0 < j < N. \quad (11)$$

Es importante resaltar que para que  $t_1 > 0$  exista, los coeficientes de  $\varphi$  deben cumplir que  $\alpha_j \neq 0$  para algún  $1 \leq j \leq N-1$ . En otro caso, esta condición inicial es un múltiplo de la Ecuación (9) por lo que su código está integrado completamente por ceros.

Por otro lado, en la Ecuación (11) se observa que esta función depende de un umbral  $\epsilon$ , cuando el valor del flujo es mayor a este valor, entonces se considera que su flujo está encendido y cuando el flujo es menor al umbral,  $\epsilon$  se considera que está apagado. Dada una condición inicial, para evitar crear un código que desde el principio tengan todas sus coordenadas apagadas, es conveniente utilizar un umbral pequeño, es decir, asegurarse que cumpla la condición:

$$\epsilon \leq \min_{1 \leq j \leq N} \{ \alpha_j \}.$$

Obsérvese que por la paridad que presentan los valores propios, hay pares de coordenadas que tienen la misma velocidad en la que se apagan. Más aún, se excluye a propósito el término  $N$ -ésimo, debido a que desde el principio es constante. Lo que permite enfocarse en las componentes que varían hasta llegar al consenso. Por este motivo, se concluye que la familia de todos los códigos posibles denotados en la Ecuación (11) tiene tamaño  $2^{N-1}$ , por ejemplo, si consideramos  $N = 3$ , los posibles códigos son  $2^2$  que (abusando un poco de la notación) son  $\{00,01,10,11\}$ . El valor de  $\epsilon$  es importante para distinguir el  $t_1$  de una condición inicial dada y de esa forma generar su código, pero aún así, para cualquier valor de  $\epsilon > 0$  es posible generar toda la familia de códigos (con la diferencia de que el conjunto de condiciones iniciales que genera cada código es distinta) por lo que es posible prescindir de él. Se usó esta construcción únicamente con fines didácticos.

Volviendo a la dinámica de los códigos, por ejemplo, en dimensión  $N = 4$ , todos los posibles estados que se pueden generar son 8, los cuales están codificados en la siguiente familia  $\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$ , que representan los vértices del diagrama de transición. Para

colocar las flechas correspondientes al diagrama, es necesario conocer la evolución de dichos códigos.

Debido a las características que presenta el sistema propio de la matriz laplaciana del grafo cíclico, las reglas de evolución del sistema en la base propia, se enunciarán en términos de los códigos que se pueden generar en cada dimensión, que se sintetizan en los siguientes dos enunciados:

Sea  $c \in \{0,1\}^{N-1}$  un código. La coordenada  $i$  y la coordenada  $N-1$  se apagan al mismo tiempo.

Sea  $c \in \{0,1\}^{N-1}$  un código. Las coordenadas se apagan desde las del centro hacia las de los extremos, es decir, de la coordenada  $\text{floor}(N/2)$  a la coordenada 1 y al mismo tiempo, de la  $\text{ceiling}(N/2)$  a la coordenada  $N-1$ .

Por un lado, la regla I se establece debido a la simetría de los elementos de  $\text{Spec}(L(M_{C_N}))$ . Por otro lado, la regla II se establece porque las componentes centrales (es decir, las que se encuentran en las posiciones  $\text{floor}(N/2)$  y  $\text{ceiling}(N/2)$ ) son las que tienen mayor velocidad de convergencia al cero. Por simplicidad, se puede asumir una tercera regla:

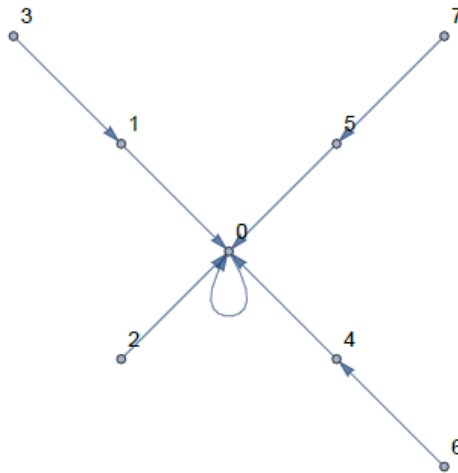
Sea  $c \in \{0,1\}^{N-1}$  un código. No se pueden apagar más de dos de sus coordenadas al mismo tiempo.

Cuando  $N = 3$ , tenemos las siguientes flechas en su diagrama de transición:  $01 \rightarrow 00, 10 \rightarrow 00, 11 \rightarrow 00$  y  $00 \rightarrow 00$ . Aunque es interesante ver la dinámica en esta dimensión, debido a que todas las condiciones iniciales llegan al consenso en un paso o menos, es imposible distinguir el efecto de la regla que implica un orden de apagado. Por lo que pasaremos a ver la evolución de los códigos bajo las tres reglas para el caso de dimensión cuatro:

$$\begin{aligned} 000 &\rightarrow 000 \quad 001 \rightarrow 000 \quad 010 \rightarrow 000 \quad 011 \rightarrow 001 \\ 100 &\rightarrow 000 \quad 101 \rightarrow 000 \quad 110 \rightarrow 100 \quad 111 \rightarrow 101 \end{aligned}$$

De esta forma, se construyen las flechas del diagrama de transición de  $C_4$ , el cual se presenta en la Figura 8. Por simplicidad en la escritura en las etiquetas de los vértices, se considera el número decimal asociado a cada código binario.

**Figura 8.** Diagrama de transición de  $C_4$



En este diagrama de transición podemos observar que a pesar de que de cada vértice sale una flecha, es posible que no entre ninguna flecha (vértices 2, 3, 6 y 7), entre una sola flecha (vértices 1, 2, 4 y 5) o entren múltiples (vértice 0). De esta forma se obtienen cuatro caminos extremales hacia el consenso que son sucesiones de vértices, separados por flechas, que van desde un vértice que no tiene entradas hacia el vértice 0, los cuales son:

$$010 \rightarrow 000 \quad 011 \rightarrow 001 \rightarrow 000$$

$$110 \rightarrow 100 \rightarrow 00 \quad 111 \rightarrow 101 \rightarrow 000$$

Obsérvese que al incrementar en 2 la dimensión, podemos ver como se repiten algunas secuencias de caminos. Considérese la familia de códigos  $\{0xxx0 : x \in \{0,1\}\}$  los caminos hacia código 00000, son equivalentes

a los que se muestran en el diagrama de transición en dimensión 4. Además, los caminos correspondientes a la familia de códigos generados por 1xxx1, 1xxx0 y 0xxx1 hasta llegar a 10001, 10000 y 00001 respectivamente también son equivalentes a los caminos en  $T(C_4)$ , agregando una arista más para llegar al vértice que representa 00000. Con esta información podemos construir el diagrama de transición en dimensión 6,  $T(C_6)$ , que constará de cuatro partes isomorfas (es decir, que tienen la misma forma) a  $T(C_4)$ , una de ellas conectada directamente con el vértice 0 y las otras tres unidas con una flecha, como se muestra en la Figura 9. Más aún, en este caso se tienen  $2^4=16$  caminos extremales hacia el consenso.

Análogamente, a partir de  $T(C_6)$  se puede generar el diagrama  $T(C_8)$  representado en la Figura 10, el cual tiene  $2^6=64$  caminos extremales hacia el consenso. Sucesivamente, es posible continuar generando los diagramas de transición para dimensiones arbitrariamente grandes. En otras palabras, los diagramas de transición se generan recursivamente, bajo la siguiente regla:

Sea  $T(C_{2N})=(V_{2N}, A_{2N})$  el diagrama de transición asociado al flujo difusivo sobre el grafo cíclico de dimensión par  $2N$ , entonces el conjunto de vértices  $V_{2N}$  es tal que tiene cuatro copias del conjunto de vértices de la dimensión par anterior y a cada copia se le distinguirá con un superíndice  $i$ :

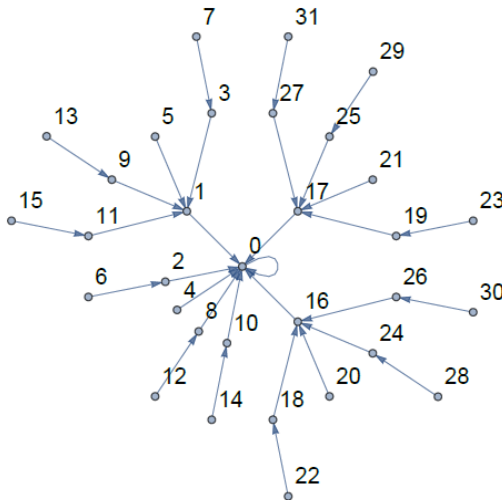
$$V_{2N} = \bigcup_{i=1}^4 V^i 2_{(N-1)}.$$

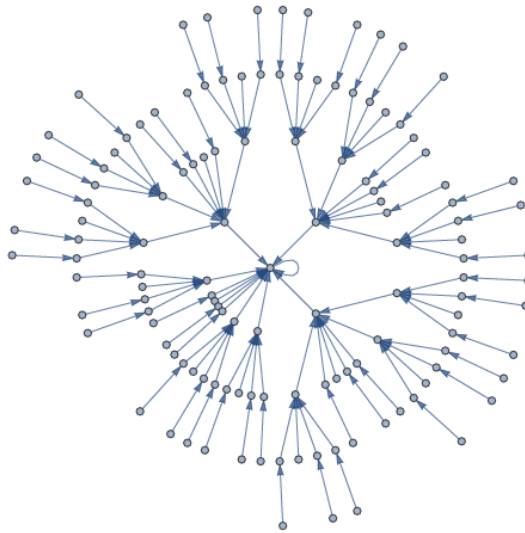
Además, el conjunto de flechas también se conforma de cuatro copias del conjunto de flechas de la dimensión par anterior, junto con tres nuevas flechas que unen los ceros de tres de las copias al cero de la cuarta copia.

$$A_{2N} = \left( \bigcup_{i=1}^4 A^i_{2(N-1)} \right) \bigcup_{i=1}^3 (0^i, 0^4).$$

La semilla para la construcción de estos diagramas de transición puede ser  $T(C_4)$ . Más aún, de manera general, observamos que el número de caminos extremales hacia el consenso es  $2^{N-2}$  y su longitud máxima (es decir, la longitud más grande que puede alcanzar un camino extremal) es de  $N/2$ .

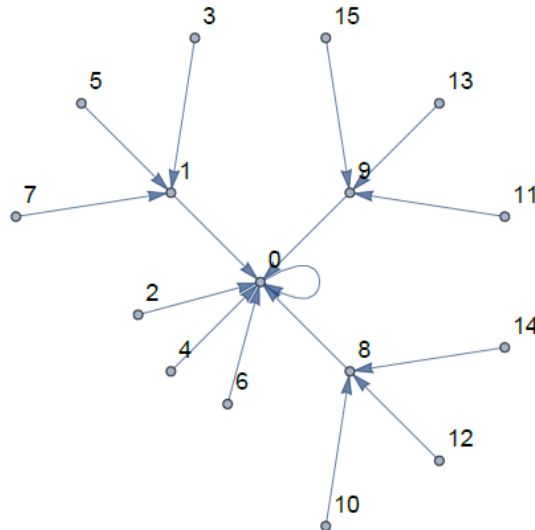
**Figura 9.** Diagrama de transición de  $C_6$



**Figura 10.** Diagrama de transición de  $C_8$ 

En el caso de las dimensiones impares, a pesar de que los códigos siguen las mismas reglas de evolución, los diagramas de transición generados son independientes a los de las dimensiones pares. El primer ejemplo significativo de dimensión impar se da en dimensión cinco, en donde la evolución de los códigos es la siguiente:

0010 → 0000 0011 → 0001 → 0000 1010 → 1000 → 0000 1011 → 1001 → 0000  
 0100 → 0000 0101 → 0001 → 0000 1100 → 1000 → 0000 1101 → 1001 → 0000  
 0110 → 0000 0111 → 0001 → 0000 1110 → 1000 → 0000 1111 → 1001 → 0000

**Figura 11.** Diagrama de transición de  $C_5$ 

El diagrama de transición de la siguiente dimensión impar  $T(C_7)$  también se construye de manera recursiva. Obsérvese que las evoluciones de los códigos generados por  $0xxxx0$  son equivalentes a las evoluciones presentadas en el diagrama de transición de  $C_5$ . Más aún, los caminos que comienzan desde los vértices que representan los códigos  $1xxxx0$ ,  $0xxxx1$  y  $1xxxx1$  hacia  $100000$ ,  $000001$  y  $100001$ , respectivamente, también son equivalentes a los caminos extremales de  $T(C_5)$ . En la Figura 12 se muestra  $T(C_7)$ , en el cual se observa que hay cuatro copias de  $T(C_5)$ , una que llega al vértice cero, y las otras tres que están conectadas a este vértice con una flecha. Más aún, el número de caminos extremales en dimensión siete son  $2^4 \cdot 3 = 48$ .

Debido a este comportamiento, vemos que los diagramas de transición de dimensión impar también son generados de manera recursiva, pero con diferente semilla generadora. Es decir, el diagrama  $T(C_{2N+1}) = (V_{2N+1}, A_{2N+1})$ , está formado por el conjunto de vértices  $V_{2N+1}$  que

tiene cuatro copias del conjunto de vértices de la dimensión impar anterior, los cuales se distinguen mediante un superíndice:

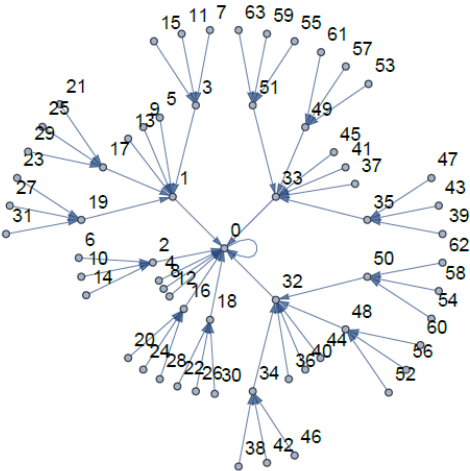
$$V_{2N+1}^4 = \bigcup_{i=1}^4 V_{2N-1+1}^i.$$

Además, el conjunto de flechas  $A_{2N+1}$  también tiene cuatro copias del conjunto de flechas en la dimensión impar anterior, además de tres flechas que van de los ceros de tres de las copias hacia el cero de la cuarta copia.

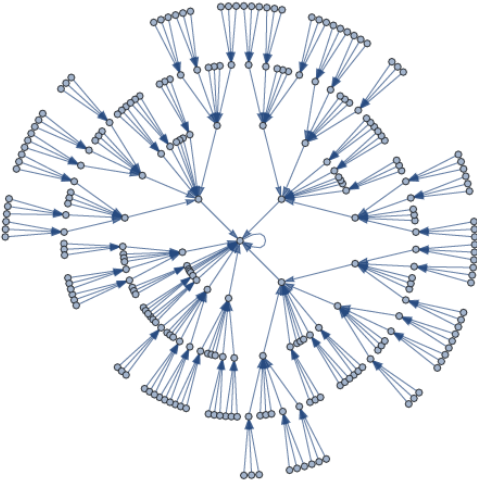
$$A_{2N+1} = (\bigcup_{i=1}^4 A_{2(N-1)+1}^i) \cup (\bigcup_{i=1}^3 (0^i, 0^4)).$$

El diagrama  $T(C^5)$  puede ser utilizado como semilla para la construcción recursiva de los diagramas de transición en dimensión impar. Nótese que el número de caminos extremales hacia el consenso en dimensión impar arbitraria es  $2^{N-1} \cdot 3$  y tienen longitud máxima  $\text{floor}(N/2)$ . Utilizando esta construcción, en la Figura 13 se muestra el diagrama de transición en dimensión 9.

**Figura 12.** Diagrama de transición de  $C_7$



**Figura 13.** Diagrama de transición de  $C_9$



En vista de las construcciones presentadas previamente, podemos observar que mediante la misma regla de recursividad es posible generar dos estructuras combinatorias distintas, dependiendo de la paridad del sistema. Además, al repetir este proceso infinitas veces, podemos inferir que las componentes resultarán invariantes bajo una transformación que implique un cambio de escala, definido como fractales escalados por el reconocido matemático polaco Benoît Mandelbrot (1924-2010) en 1983 [4].

En este caso, todos los posibles caminos hacia el consenso que puedan seguir las gotas de tinta que sean derramadas en el contenedor toroidal, pueden empezar en cualquier vértice del diagrama de transición y seguir sus trayectorias en las “ramas” de este fractal. Por lo tanto, el movimiento de las partículas que dibujan líneas fractales microscópicamente, macroscópicamente, también caminan dentro de fractales escalados.

## Referencias

- [1] Bernstein, M. N. 2020. The graph laplacian. [https://mbernste.github.io/posts/laplacian\\_matrix/](https://mbernste.github.io/posts/laplacian_matrix/), 2020. Último acceso: 24 marzo 2023.
- [2] España, A., Leoncini, X., and Ugalde, E. 2023. Paths towards synchronization: Analytical treatment of completely connected networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*.
- [3] Fick, A. 1855. Ueber Diffusion. *Annalen der Physik* 170(1), 59-86.
- [4] Mandelbrot, B. B. 1983. *The fractal geometry of nature*, 3 ed. W. H. Freeman and Comp., New York.
- [5] Mehrer, H., and Stolwijk, N. 2009. Heroes and highlights in the history of diffusion. Eds Parlange, G., and Notarstefano, G. *On the reachability and observability of path and cycle graphs*. *IEEE Transactions on Automatic Control* 57, 3 (2012), 743-748.
- [6] Stanoev, A., and Smilkov, D. 2013. Consensus theory in networked systems. In *Consensus and Synchronization in Complex Networks*.
- [7] Tapia-Recillas, H., and Velazco-Velazco, A. 2022. Diagonalización de matrices circulantes por medio de la transformada discreta de fourier sobre campos finitos. *Mixba'al, Revista Metropolitana de Matemáticas* 12(1), 95-98.
- [8] Zhang, X. 2011. The laplacian eigenvalues of graphs: a survey. *arXiv: Combinatorics*.

## **Sobre la autora**

Dra. Andrea Arlette España Tinajero

Contacto: [andreae@ifisica.uaslp.mx](mailto:andreae@ifisica.uaslp.mx)

Egresada de la Licenciatura en Matemáticas de la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) UAZ, generación 2012-2016.

Se tituló con la tesis: Dinámica de la función de Gauss y su relación con los números metálicos, dirigida por la Dra. Leticia Ramírez y el Dr. Juan Martínez, docente de la UAM-UAZ.

Realizó su maestría y doctorado en el Instituto de Física de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP) y un segundo doctorado en el Centre de Physique Théorique en Aix-Marseille Université en Francia. Obtuvo la distinción Kovalevskaja y el Premio Estatal de la Juventud Zacatecas en 2022.

En 2023 el reconocimiento de mejor Tesis de Doctorado en el área de ciencias básicas por la UASLP.

Actualmente es posdoctorante en la UASLP y pertenece al Sistema Nacional de Investigadores e Investigadoras Nivel I.

Coordinadora General del 58 Congreso de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana.

Sus principales temas de interés son los sistemas complejos, la modelación matemática y el análisis de datos.



# **Análisis de bases de datos composicionales**

*Ricardo David Valdez Cepeda*

## **Resumen**

El análisis de datos composicionales y sub-composicionales mediante transformaciones cerradas, log centradas y log isométricas orto-normalizadas permiten identificar composiciones y sub-composiciones cuasi-ideales.

## **Exordio**

En diversas ocasiones, los especialistas en análisis de datos involucran conjuntos de observaciones integradas por muchos elementos (variables); algunas veces, los elementos conforman un todo. Por ejemplo, las observaciones pueden corresponder a los gastos totales que ejercen países diferentes expresados en cantidades que corresponden a elementos presupuestarios diferentes. Este caso podría involucrar los gastos totales y elementos presupuestarios de 30 países diferentes; esas cifras se expresan en millones de las monedas nacionales correspondientes y claramente son no comparables; la conversión de todos los elementos presupuestarios a una moneda de referencia (por ejemplo, dólar o euro) puede mejorar, pero no resolver los problemas inherentes a la codificación de los datos, dado que unos países ejercen gastos totales pequeños y otros grandes. Ello, entonces, concierne a las cantidades gastadas en los diferentes elementos o rubros que re-

sulten de interés; así, lo aparente sería que la comparación correcta entre los países se aseguraría al expresar simplemente las cantidades de cada observación (país) como porcentajes (Figura 1). Sin embargo, al adicionar más elementos en cada observación (i.[36]e. reconocer que cada observación con cuatro elementos es una sub-composición), las cantidades relativas podrían cambiar, necesariamente disminuirían, y los valores de las proporciones con respecto al gasto total de los elementos iniciales también cambiarían (e.g. Defensa = 3.03% en base de datos con 4 elementos, Figura 1, pero Defensa = 2.42% en base de datos con 5 elementos, Figura 2).

**Figura 1.** Gasto presupuestal imaginario en varios países con base en 4 elementos o rubros expresados en una moneda de referencia y como porcentaje

País	Defensa	Salud	Economía	Educación	Total	Defensa (%)	Salud (%)	Economía (%)	Educación (%)
País 1	3	36	31	29	99	<b>3.03</b>	36.36	31.31	29.3
País 2	1	5	7	4	17	5.88	29.41	41.18	23.53
País 3	50	437	352	281	1120	4.46	39.02	31.43	25.09
⋮									
País n	26	192	71	146	435	5.98	44.14	16.32	33.56

**Figura 2.** Gasto presupuestal imaginario en varios países con base en 5 elementos o rubros expresados en una moneda de referencia y como porcentaje

País	Defensa	Salud	Economía	Educación	Servicios Públicos	Total	Defensa (%)	Salud (%)	Economía (%)	Educación (%)	Servicios Públicos (%)
País 1	3	36	31	29	25	124	<b>2.42</b>	29.03	25.0	23.39	20.16
País 2	1	5	7	4	6	23	4.35	21.74	30.43	17.39	26.09
País 3	50	437	352	281	400	1520	3.29	28.75	23.16	18.49	26.31
⋮											
País n	26	192	71	146	100	535	4.86	35.89	13.27	27.29	18.69

## Análisis de datos composicionales

Lo señalado hace que las bases de datos composicionales sean diferentes a otros tipos de bases de datos multivariadas. Los valores de cada elemento de la composición o sub-composición dependen de los valores de los otros elementos. Entonces, las correlaciones estimadas con base en esas matrices de datos carecerían de sentido porque se estimarían correlaciones negativas creadas por la restricción de la suma constante, e inclusive, las correlaciones entre algún par de elementos con base en los datos de las Figura 1 y 2 podrían ser diferentes.

Otro ejemplo: las observaciones pueden ser sub-composiciones de tejidos vegetales (e.g. hojas) de plantas de cierta especie vegetal que crecen en condiciones ambientales (ecosistemas) diferentes y están integradas por las concentraciones de algunos elementos nutrimentales esenciales. Si la concentración de cada elemento se expresa en %, (i.e. 1% = 10 g del nutriente por kg de materia seca), lo procedente es involucrar a un elemento que comprenda a los nutrientes no determinados en laboratorio ( $F_v$ ) para que la observación sea una composición, i.e. la suma sea 100% (Figura 3). Este proceso también se denomina cierre o normalización. Otra manera de realizar el cierre consiste en considerar que la suma total de los elementos involucrados corresponda al 100% en cada observación (e.g. sub-composición conformada por Nitrógeno, N; Fósforo, P; y Potasio, K). Mediante este procedimiento, Aitchison (1982) demostró que los cocientes posibles entre los elementos tanto de la composición como de la sub-composición son iguales, es decir, que las composiciones y sub-composiciones son coherentes.

**Figura 3.** Composición y sub-composición cerradas o normalizadas con base en 3 elementos nutrimentales expresados en porcentaje

<p>Composición con todos los elementos</p> $N + P + K + Fv = 100\%; 3\% + 1\% + 2\% + 94\% = 100\%; N/P = 3, N/K = 0.5, P/K = 0.5;$ <p>donde <math>FV = 100\% - 3\% - 1\% - 2\% = 94\%</math></p>
<p>Sub-composición; i.e. cuando algún elemento falta; e.g. <math>\{N + P + K\}</math></p> <p>Cierre a 100%:</p> $(N = 3\% + P = 1\% + K = 2\%) = 6\%, \text{ si } 6\% = 100\%,$ $(N = 50\% + P = 16.67\% + K = 33-33\%) = 100\%; N/P = 3, N/K = 1.5, P/K = 0.5$
<p><i>¡Los valores de los cocientes en ambos casos son iguales!</i></p>

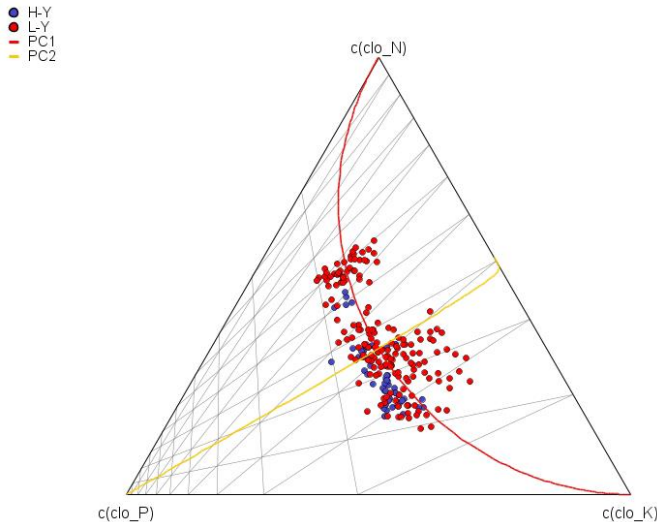
## Transformaciones logarítmicas, ‰[41] cocientes y patrones asociados

Cuando las composiciones y sub-composiciones de una base de datos ya han sido cerradas, las variables deben ser transformadas logarítmicamente con el propósito de identificar patrones de comportamiento al considerar las matrices de los elementos con diversos objetivos y usos (Aitchison, 1982). Así, lo posible es representar a las sub-composiciones en un espacio real con propiedades importantes como invarianza en escala, consistencia y correspondencia del grupo de translaciones en el espacio multidimensional real (Egozcue et al., 2003). Con base en orto-normalidad se pueden generar transformaciones logarítmicas de cocientes isométricos mediante un proceso de partición binaria secuencial (Egozcue et al., 2003). Así, estas transformaciones pueden ser visualizadas mediante herramientas como dendrogramas o diagramas ternarios, entre otras. Por ejemplo, la Figura 4 representa a los primeros dos componentes principales (PC's) que explican el 100% de la varianza total de un espacio de 228 sub-composiciones cerradas de concentraciones de Nitrógeno (N), Fósforo (P) y Potasio (K) en cladodios de *Opuntia ficus-indica* variedad 'Rojó Pelón' para producción de tunas (Blanco-Macías et al., 2022); las sub-composiciones fueron agrupadas

en categorías de rendimiento pequeño (L-Y) y grande (H-Y) al considerar 1.17 kg por cladodio como referencia.

El factor que más diferencia a las sub-composiciones es la oposición entre las concentraciones y cerradas centradas de N y K; la mayoría de las sub-composiciones con rendimientos grandes son caracterizadas por concentraciones pequeñas de N y grandes de P; por el contrario, la mayoría de las sub-composiciones con rendimientos pequeños son caracterizadas por concentraciones grandes de N y pequeñas de P. En otras palabras, deficiencias de P pueden estar asociadas al rendimiento pequeño en algunas sub-composiciones cuya situación debería mejorarse. Este tipo de resultados puede conllevar a la identificación de composiciones o sub-composiciones cuasi-ideales y al diseño planes de mejora en procesos que conduzcan a tal situación.

*Figura 4. Diagrama ternario representando a los dos primeros Componentes Principales (PC's) en un sub-espacio de 228 sub-composiciones cerradas y log centradas de Nitrógeno (N), Fósforo (P) y Potasio (K) agrupadas en las categorías rendimientos pequeños (L-Y) y grandes (H-Y)*



*Blanco-Macías et al., 2022.*

## Referencias

- Aitchison, J. (1982). The statistical analysis of compositional data. *J. R. Soc. B* 44 (2), 139–277. <https://www.jstor.org/stable/2345821>.
- Egozcue, J.J., Pawlowsky-Glahn, V., Mateu-Figueras, G., and Barcelo-Vidal, C. (2003). Isometric log-ratio transformations for compositional data analysis. *Math. Geol.* 35 (3), 279–300. <https://doi.org/10.1023/A:1023818214614>.
- Blanco-Macías, F., Márquez-Madrid, M., Lara-Herrera, A., & Valdez-Cepeda, R. D. (2022). Representation of *Opuntia ficus-indica* (L.) Miller macro-nutrient compositions. *Acta Horticulturae* 1343, 297-308. <https://www.actahort.org/books/1343/>

## Sobre el autor

Dr. Ricardo David Valdez Cepeda

Docente-Investigador en la Universidad Autónoma de Zacatecas.

Docente-Investigador en la Universidad Autónoma de Chapingo.

Su línea de investigación es ‘Sistemas Complejos en Agricultura’.

El Sistema Nacional de Investigadores lo ha distinguido como Investigador Nacional Nivel III.

## Computación Universal con Autómatas Celulares Binarios en 2 Dimensiones

*José Manuel Gómez Soto*

Un autómata celular es un objeto abstracto formado por un gran número de celdas con autómatas idénticos que evolucionan de manera sincronizada\*. El estado de una celda en un momento dado depende del estado de sus celdas vecinas en el instante anterior. La evolución global es el resultado de innumerables interacciones locales, regidas por una regla conocida como regla de transición, regla local o regla de evolución. Debido a que, con reglas locales simples y deterministas, tienen un comportamiento global impredecible, se han convertido en un modelo matemático valioso para el estudio de sistemas complejos (Wolfram, 1994).

El concepto de autómata celular surge a mediados de la década de 1950 cuando John Von Neumann (1903-1957) estaba interesado en demostrar que una máquina pudiera autoreproducirse. Von Neumann tenía en su mente el uso de autómatas en su demostración, y por sugerencia de Stanislaw Ulam (1909-1984) utilizó el concepto de celdas o células que son cuadrados de una malla plana teóricamente infinita. Ulam comenzó a usar celdas en sus estudios sobre objetos geométricos definidos recursivamente [22], mismos que simulaba en la computadora del laboratorio de los Álamos, de manera que le pareció que los autómatas de Von Neumann podrían interactuar colocados en esa estructura. Usando estas dos ideas John Von Neumann demostró que no existe

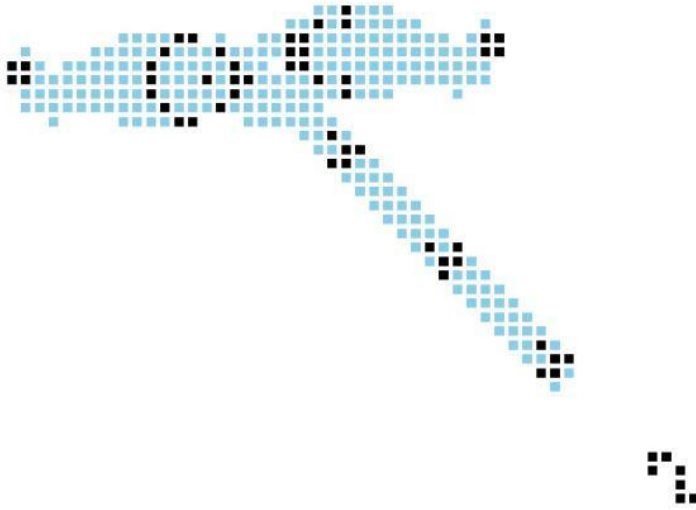
---

\*. En este artículo el tipo de citación corresponde al empleado en el área de matemática educativa.

ninguna contradicción lógica en que una máquina realice una copia de sí misma [23].

Otro concepto importante que estaría involucrado en la demostración de Von Neumann fue la Máquina de Turing [21], el concepto matemático con el que años atrás Alan Turing (1912-1954) había demostrado la posibilidad de la existencia de las computadoras como las conocemos hoy día: un dispositivo capaz de leer un conjunto de instrucciones y llevar a cabo la tarea que estas instrucciones especifican. Von Neumann tomaría este concepto para definir un “constructor universal”, donde éste sería capaz de construir cualquier máquina a partir de una descripción de dicha máquina, entonces si se le daba la descripción de sí misma podría autoreproducirse. Von Neumann tomaría este concepto para definir un “constructor universal”, donde éste sería capaz de construir cualquier máquina a partir de una descripción de dicho artefacto, entonces si se le daba la descripción de sí misma podría autoreproducirse. Pero, además, con una pequeña sutileza, debería pasar a la máquina que acababa de construir una copia de la descripción de como autoconstruirse, para que ésta fuera capaz a su vez de crear otra copia de sí misma y así sucesivamente.

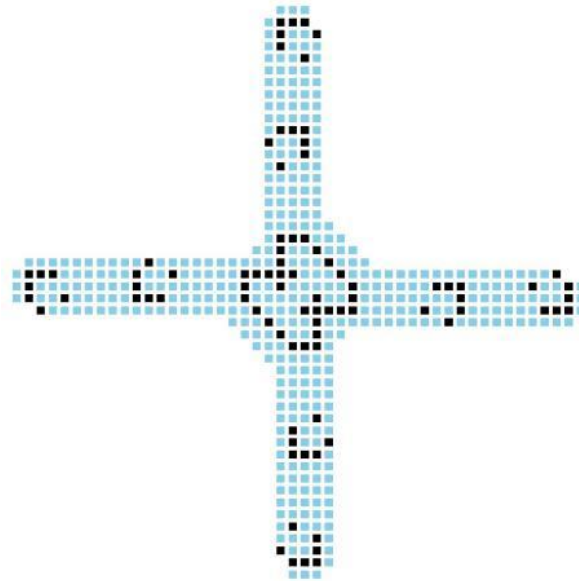
**Figura 1:** El glider-gun del Juego de la Vida enviando “gliders” con una frecuencia de 30 generaciones. Cada “glider” es detenido por un “eater”. La sombra indica el espacio que necesita el “glider-gun” en su dinámica y el camino que siguen los “gliders” que son lanzados



El autómata celular generado por Von Neumann tenía como vecinos a las células ortogonales, cada célula tenía 29 estados (entre los cuales se encontraba el estado “vacío” o “quieto”) y estaba constituido por cientos de miles de celdas en el plano. Años más tarde con el descubrimiento del ADN de Watson, Rosalind Franklin y Crick [24], se confirmaría que la lógica de la autoreproducción de los seres vivos está basada en el modelo de Von Neumann.

Después se lograría lo mismo con menos estados, Codd con 8 estados y una vecindad de Von Neumann en 1968 [3], Banks con 4 estados y una vecinda de Von Neumann en 1970 [1], y John Horton Conway con dos estados y una vecindad de Moore<sup>1</sup> también en 1970 [8].

**Figura 2:** El “glider-gun” de la regla R lanza 4 gliders al espacio. La sombra indica el espacio que necesita el “glider-gun” en su dinámica y el camino que siguen los “gliders” que son lanzados

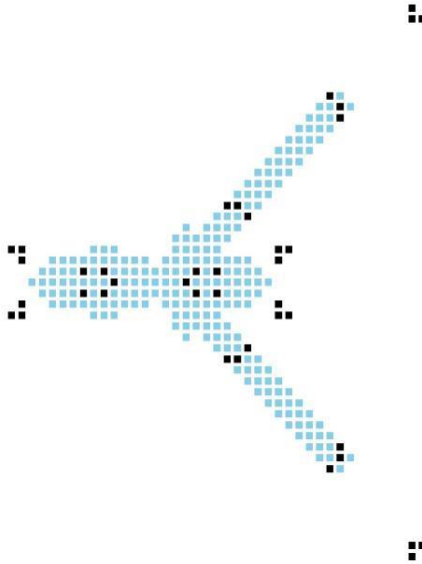


En esta última simplificación John Horton Conway (1937-2020) había agregado una variante en la construcción de su autómata celular; él pensaba en la creación de un sistema ecológico donde la densidad de las células con el estado activo e inactivo se mantuviera estable, es decir que no se llenara todo el plano del estado activo 1 o se vaciara todo el espacio con el estado 0. Llamaría a las células con el estado 0 como células “muertas” y a las células con el estado 1 como células “vivas” y nombró a su autómata celular como “El Juego de la Vida”.

La regla de interacción local que definió para lograr la estabilidad entre “vida” y “muerte” consideraba que la célula “moriría” o seguiría “muerta” en situaciones de sobrepoblación o de aislamiento, sólo en el caso de que una célula “viva” estuviera rodeada por 2 o 3 células “vivas” sobreviviría y en caso de estar “muerta” “nacería” bajo la condición de

tener 3 células “vivas” rodeándola. En el Juego de la Vida se demostró la autoreproducción y su capacidad de realizar computación universal considerando, el almacenamiento, la transmisión y el procesamiento de datos [2]. Francis Jeffrey Pelletier and Norman M. Martín habían demostrado que si se tienen las compuertas lógicas de conjunción, disyunción y negación se podría tener capacidad de procesamiento [16], Conway creó estas compuertas lógicas en el juego de la vida, además le agregó memoria y transmisión de datos, para obtener un dispositivo computacional. Años más tarde Randall daría otra demostración de que el “El Juego de la Vida” es Universal utilizando la Máquina de Turing [18]. El Juego de la Vida no sólo demostró tener capacidad de realizar cálculos, sino que mostró una diversidad y complejidad en su comportamiento que no se ha encontrado en ningún otro autómatas celular [17], [6].

**Figura 3:** X-Rule envía con una frecuencia de dos “gliders” hacia la derecha de su espacio. Los “gliders” son esperados por un “eater” para que no avancen más. La sombra indica el espacio que necesita el “glider-gun” en su dinámica y el camino que siguen los “gliders” que son lanzados

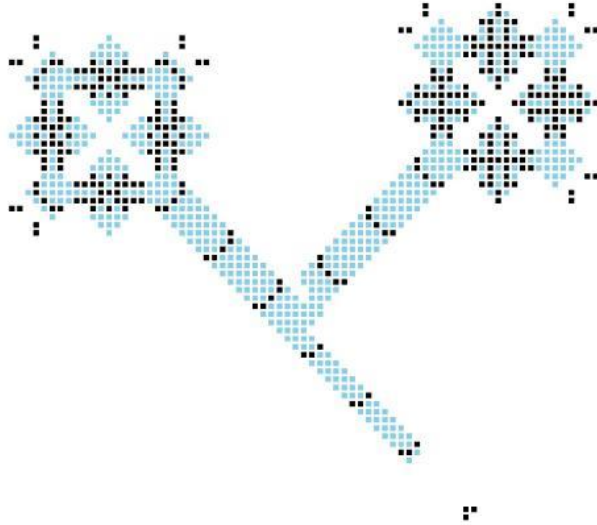


Stephen Wolfram decidió hacer un estudio sistemático de todos los autómatas celulares binarios en una dimensión caracterizándolos por su comportamiento. Considerando la teoría clásica de sistemas dinámicos propuso una clasificación en cuatro clases: 1) Autómatas celulares cuyo comportamiento cae en un espacio que no cambia. 2) Autómatas celulares con estructuras aisladas periódicas. 3) Autómatas celulares con todo el espacio caótico y 4) Autómatas celulares con estructuras aisladas con comportamiento dinámico diverso. Presumiblemente el Juego de la Vida y otros autómatas celulares capaces de hacer computación universal se encontraban en la clase 4. Sin embargo, como más tarde demostraron Culik II y Yu, determinar si algún autómata celular pertenece a alguna clase es indecidible [4].

Entonces la única manera de saber si un autómata celular es capaz de hacer computación universal es buscándolo o construyéndolo, es decir, buscar o definir una regla local que permita crear los dispositivos necesarios: las compuertas lógicas con su memoria y transmisión de datos, o una Máquina de Turing u otro modelo computacional teórico.

Para el Juego de la Vida la construcción de las compuestas lógicas, fue necesario la existencia de un patrón que viajara en el espacio bidimensional, a ese patrón se le conoce como “glider” y más aún se necesitaba una configuración que enviara información al espacio, es decir una configuración que lanzara de manera periódica “gliders” al espacio: un “glider-gun” (Figura 1). Por otro lado, se requería también de una estructura que destruyera “gliders”, un “eater” y por supuesto colisiones convenientes, es decir choques que no dejaran restos después de la colisión que pudieran interferir de algún modo en la dinámica del autómata celular.

**Figura 4:** Es posible también generar un glider-gun a partir de otros. En Precursor-Rule, dos glider-gun envían “gliders” cuya colisión genera un glider de tres células. Abajo un “eater” los detiene para controlar su viaje en lo que puede ser parte de un mecanismo más grande



El “glider” fue encontrado por el profesor Richard K. Guy, amigo y colega de Conway, y el “glider-gun” lo encontró Bill Gosper, quién con eso demostró que la conjetura propuesta por Conway de que no existía un patrón que creciera indefinidamente en el Juego de la Vida era falsa.

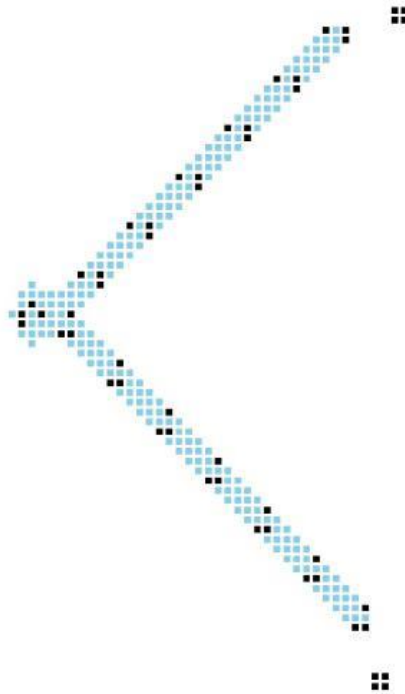
Entonces la pregunta que se abrió en esta área de investigación fue: ¿es el Juego de la Vida el único autómatas celulares con capacidad de realizar computación universal en dos dimensiones? [15] O en términos más modestos: ¿es el único autómatas celulares capaz de realizar procesamiento de datos, es decir tener compuertas lógicas?

Realizando variaciones a la regla local del juego de la vida se han encontrado autómatas celulares que tienen “gliders” y “gliders-gun” [7]. Entonces surgió otra pregunta: ¿existen autómatas celulares con una regla local que no se base en la regla de nacimiento y supervivencia del Juego de la Vida que realice computación universal o que sea

universal desde el punto de vista lógico, es decir que soporte compuertas lógicas?

En el 2004, Emanuel Sapin basándose en algoritmos genéticos encontró la Regla R, un autómata celular bidimensional cuya regla local es distinta al juego de la vida y que soporta “glider-gun” (Figura 2) y compuertas lógicas [19]. Años más tarde tomando esa misma técnica encontró decenas de miles de autómatas celulares con “gliders-gun” muy sencillos, la mayoría de ellos enviando “gliders” de manera horizontal [20].

**Figura 5:** El gliders-gun de 4 células de Sayab Rule en acción, enviando “gliders” en dos direcciones con una frecuencia de 20 generaciones. Cada “glider” es detenido por un “eater” que en este caso es un bloque de 4 celdas en forma de cuadrado



Otros autómatas celulares con regla local distinta al esquema nacimiento-sobrevivencia del Juego de la Vida y con capacidad de soportar gliders-guns se han publicado en años recientes [13]. A continuación, se describen algunos de ellos.

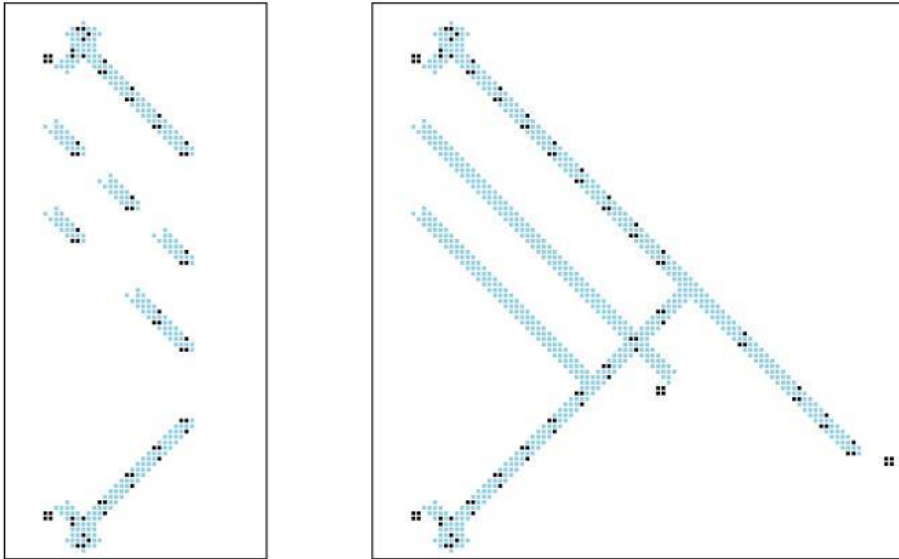
En Física se le da el nombre de anisotrópica a la materia que cambia sus propiedades con respecto a su dirección en el espacio. En 2015 se encontró la Regla X con universalidad lógica [9], este autómata celular es anisotrópico ya que su “gliders-gun” sólo envía “gliders” en una dirección (Figura 3), de manera que sus compuertas lógicas también operan en una sola dirección. Sin embargo, con esos “gliders-gun” anisotrópicos se pueden construir meta-“gliders-gun” isotrópicos y entonces en un nivel superior se puede lograr la isotropía. El “glider-gun” de este autómata celular consiste en dos “gliders” que chocan periódicamente al ser reflejados por otro patrón. Al llevarse a cabo la colisión emiten el “glider” sólo hacia la derecha del espacio. Si se cambia la posición del “glider-gun”, éste deja de emitir “gliders” aunque con un cambio mínimo en la regla local se puede decidir en qué dirección se desea que opere el autómata celular.

Otro autómata celular llamado X-Rule’s Precursor [10] tiene presencia de “gliders-gun” (Figura 4), “eaters”, colisiones convenientes y por lo tanto es capaz de soportar Universalidad Lógica. Precursor-rule, para nombrarlo en forma abreviada, es la regla de dónde surgió el autómata celular X-rule. Precursor-rule es un autómata celular con una diversidad que soporta varios “glider-guns” (Fig. 4), “puffer-trains”, “spaceships”, “rakes” y “breeders” [13].

Sayab-rule es un autómata celular muy interesante [11], tiene un “glider-gun” (Figura 5) compuesto de sólo 4 células activas que emite 2 “gliders” diagonales de 3 células. Dada su simplicidad es muy fácil que surja a partir de una configuración inicial aleatoria. La colisión de 2 “gliders” generan un “glider-gun” y el choque entre un “glider” y un patrón oscilatorio generan también un “glider-gun”. En Sayab-Rule se tiene el escenario como en el Juego de la Vida donde un patrón puede generar a otro patrón que a su vez genera el patrón original. La Figura 6 muestra la compuerta lógica disyuntiva construida en Sayab-Rule.

En un autómata celular las células operan en paralelo, lo que les otorga poder y velocidad. Esa característica inspiró a realizar computación en paralelo utilizando autómatas celulares. A inicios de la década de 1980, la computadora “Connection Machine” basada en autómatas celulares fue construida en el “Massachusetts Institute of Technology” (MIT) [12]. Años después también en el MIT se desarrolló la “Cellular Automata Machine” CAM-8 [14], que además permitía realizar simulaciones de autómatas celulares en paralelo. Hace dos décadas y fracción una nueva área de investigación computacional ha estado desarrollándose, se trata de la Computación Cuántica, misma que abre la posibilidad de considerar autómatas celulares en su diseño, esta propuesta se conoce como “Quantum-dot Cellular Automata” [5].

**Figura 6:** Un ejemplo de la compuerta de disyunción ( $0 \oplus 0 = 0$ , en otro caso  $= 1$ ) que opera sobre flujos de datos representados por hileras de "gliders" y espacios. La cadena de 5 bits (11001) representada por la segunda hilera de abajo hacia arriba en la imagen izquierda ("glider"- "glider"-espacio-espacio-"glider"), realiza la operación de disyunción con la cadena de 5-bits (10101) representada por la tercer hilera ("glider"- "espacio"- "glider"-espacio-"glider"), también de la imagen izquierda. Al final de la interacción de estos flujos con el flujo de "gliders" de los dos " glider-guns" de la configuración dan como resultado (11001  $\oplus$  10101)  $=$  11101, el flujo de "gliders" ("glider"- "glider"- "glider"-espacio-"glider") que aparecen en la imagen de la derecha



## Referencias

- [1] E.R. Banks. (1970). Universality in cellular automata, Symposium on Switching and Automata Theory (SantaMonica, California), IEEE, 1970, pp. 194–215.
- [2] Berlekamp E, R., Conway J.H., Guy R.K. (1982). Winning Ways for Your Mathematical Plays, 2(25) What is Life?, 817-850, Academic Press, New York,
- [3] Codd E. F. (1968). Cellular Automata, Academic Press, Inc. New York and London,
- [4] Culik K. II and Yu S. (1998). Undecibility of CA Classification Schemes, Complex Systems 2, pp. 177-190.
- [5] Cole, T., Lusth, J. C. (2001). Quantum-dot cellular automata, Progress in Quantum Electronics, 25(4), pp. 165-189.
- [6] A community for Conway's Life, <http://www.conwaylife.com/>.
- [7] Eppstein D. (2010). Growth and Decay in Life-Like Cellular Automata, Game of Life Cellular Automata, Eds by Andrew Adamatzky, Springer Verlag.
- [8] Gardner, M. (1970). Mathematical Games - The Fantastic combinations of John Conway's new solitaire game Life, Scientific American, October, pp. 120-123,
- [9] Gómez J. M. and Wuensche A. (2015). The X-Rule: Universal Computation in a Nonisotropic Life-Like Cellular Automaton, Journal of Cellular Automata, 10(3-4), pp. 261-294.
- [10] Gómez J. M. and A. (2017). Wuensche, "X-Rule's Precursor Is Also Logically Universal, Journal of Cellular Automata, 12(6), pp. 445-473.
- [11] Gómez J. M. and Wuensche A. (2017). Logically Universality from a Minimal 2D Glider-Gun, Complex Systems, Vol. 27(1).
- [12] Hillis W. D. (1984). The connection machine: A computer architecture based on cellular automata, Physica D: Nonlinear Phenomena, 10(1-2), pp. 213-228.

- [13] <https://matematicas.reduaz.mx/?jmgomez/jmgomezweb/LogicalUniversality.html>.
- [14] Margolus N. CAM-8: A Computer Architecture Bases on Cellular Automata. arxiv: <https://arxiv.org/abs/comp-gas/9509001>
- [15] Minondo I. and Reiter C. A. (2021). Is Life Alone in the Universe of Symmetric Cellular Automata. *Journal of Cellular Automata*, 15, pp. 333-357
- [16] Pelletier, F. J. and Martin, N. M. (1990). Post's Functional Completeness Theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31(2).
- [17] Poundstone, W. (2013). *The Recursive Universe: Cosmic Complexity and the limits of Scientific Knowledge*. Dover Publication, New York.
- [18] Randall, P. (2002). *Turing Universality of the Game of Life. Emergence, Complexity and Computation*. Springer Verlag.
- [19] Sapin, E., Bailleux, O., Chabrier, J. J. and Collet, P. (2004). A new universal cellular automaton discovered by evolutionary algorithms. *Lecture Notes in Computer Science*.
- [20] Sapin, E., Adamatzky, A., Collet, P. and Bull, L. (2010). Stochastic automated search methods in cellular automata: the discovery of tens of thousands of glider guns. *Natural Computing* 9, pp. 513-543,
- [21] Turing, A. (1937). On computable numbers, with application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of Lond. Math. Soc.*, 42(2), pp. 230-265.
- [22] Ulam Stanislaw y Robert G. Schrandt, "On Recursively Defined Geometrical Objects and Patterns of Growth," *Essays on Cellular Automata*, edited by Arthur Burks, pp. 232-243, University of Illinois Press, Urbana, Illinois, (1970).
- [23] Von Neumann J. (1966). *The Theory of Self-Reproducing Automata*, A. W. Burks, ed., University of Illinois Press, Urbana, Illinois
- [24] Ulam S. (1953). Molecular structure of nucleic acids: a structure for deoxyribos nucleic acid, *Nature*, pp. 737-738.
- [25] Wolfram, S. (1994). *Cellular Automata and Complexity*, CRC Press.



## La matemática de la proximidad

*Juan Antonio Pérez*

*Con Poincaré, la Topología dejó de ser una colección de curiosidades matemáticas, para convertirse en una independiente y vigorosa rama de la Geometría.*

***Pavel Alexandroff***

Los seres humanos somos lo que nuestras relaciones hacen de nosotros.\* Son más las interacciones que los objetos lo que hace a la materia lo que es; en su íntima composición subatómica, lo que llamamos materia presenta mayormente vacíos, siendo las partículas, en realidad lo que menos lugar ocupa. Las fuerzas interatómicas mantienen el equilibrio.

La realidad no es distinta a nivel cósmico; los cuerpos celestes se encuentran separados por inmensidades de vacío, manteniéndose en armónica coexistencia gracias a la gravitación y otras interacciones.

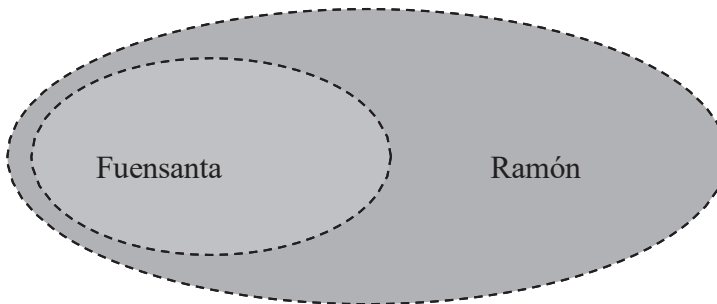
Lo que determina la forma final de la personalidad, si bien es cierto que cargan información genética que condiciona parte de su paso por la vida, es la educación, amistades y medio. De hecho, las condiciones congénitas no son sino el producto de la interacción entre sus progenitores. Somos, en fin, nuestras relaciones. Más aún, las relaciones entre las personas son, con enorme frecuencia, asimétricas. El aficionado siente profunda cercanía con el objeto de su admiración, mientras que

\*. En este artículo el tipo de citación corresponde al empleado en el área de matemática educativa.

éste casi nunca se entera la existencia del primero. Muchas tragedias parten de que el amante no es correspondientemente amado. El término “amante” carece aquí de connotación moral alguna: el “amante” es emisor de un afecto intenso que el “amado” recibe.

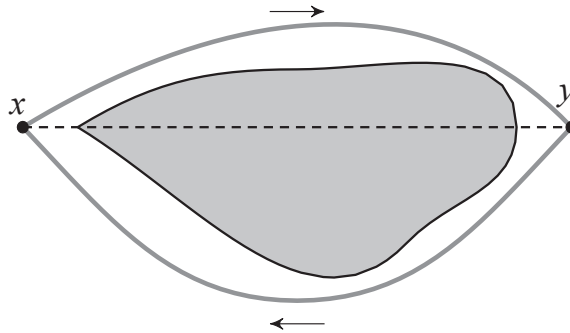
## Un amor imposible

En muchas de sus célebres obras, el exquisito poeta jerezano Ramón López Velarde (1888-1921) se asume como secreto amante de Fuensanta, un personaje que bien pudiera ser ficticio, pero que algunos eruditos identifican como Josefa de los Ríos, virtuosa dama contemporánea del vate, aunque al parecer un poco mayor que él. Por circunstancias no del todo claras, el intenso amor que el impetuoso joven profesaba al objeto de sus más ardorosos deseos, no era correspondido. No hay plena certeza sobre si se trató de un obstáculo moral o de simple y llana indiferencia. En el pensamiento de Velarde es constante la presencia de su Fuensanta amada; sus textos y acciones están siempre orientadas hacia la mujer de sus sueños. Por el contrario, nada en ella establecía una conexión con el infortunado Ramón.



La proximidad entre Ramón y Fuensanta no es la misma en cada dirección. Él se encuentra muy próximo a su amada, mientras que se pierde en la lejanía desde el punto de vista de ella. En términos matemáticos la situación no es en absoluto extraña: sobran los ejemplos de ciudades

separadas por distintas distancias, de acuerdo con el sentido de la carretera que las comunica. En la figura siguiente se ilustra un caso hipotético, de dos ciudades una llamada  $x$  y la otra  $y$ , en puntos opuestos de la ribera por un lago.



Una carretera se recorre en el sentido de  $x$  a  $y$ , mientras que otra, sensiblemente más larga parte de  $y$  teniendo a  $x$  como destino. Escribiremos esta asimetría como  $\rho(x, y) \leq \rho(y, x)$ . En completa analogía, la patética relación amorosa entre Fuensanta y Ramón admite una expresión simbólica semejante  $\rho(R, F) \leq \rho(F, R)$ .

Para los textos de Geografía, la distancia de  $x$  a  $y$ , que es la misma de regreso, es igual a la longitud de la recta punteada que las tiene como extremos. Las guías turísticas, por su parte, consignarán proximidades distintas acordes con el sentido del desplazamiento.

## La métrica de Lawvere

Una métrica sobre un conjunto  $X$  es una función “distancia” que a cada par de puntos  $x, y \in X$  asigna un número no negativo  $d(x, y)$  sujeta a las propiedades siguientes, mismas que, habida cuenta de nuestra euclidiana experiencia, son totalmente afines con la intuición:

Regularidad. Todo punto dista cero de sí mismo:  $d(x, x) = 0$ .

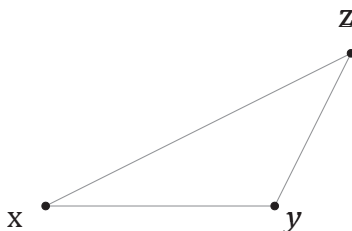
No degeneración. Dos puntos distan cero, sólo si coinciden:

$$[d(x, y) = 0] \Leftrightarrow (x = y).$$

Simetría. Para dos puntos cualesquiera  $d(x, y) = d(y, x)$ .

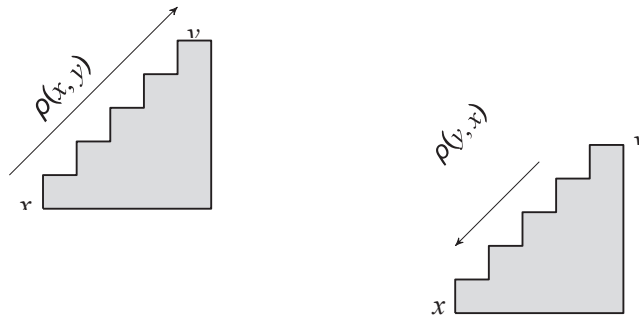
Desigualdad del triángulo Dados tres puntos arbitrarios

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$



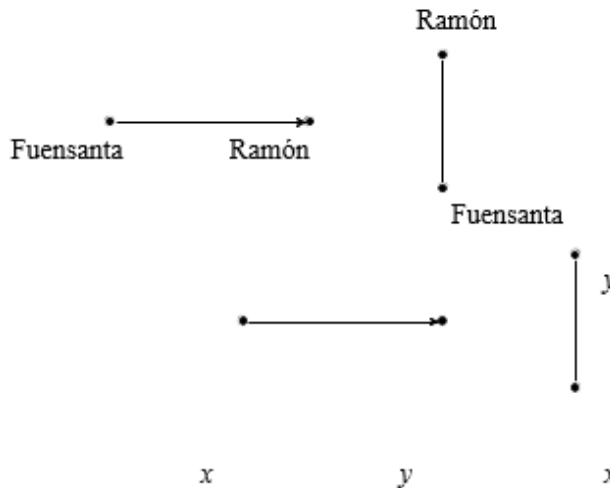
Hay afinidades entre las personas que las hacen tan próximas que no hay “distancia” apreciable entre ellas. Bajo ciertas consideraciones la “distancia política” entre dos personas con la misma ideología es nula: distan cero a pesar de ser dos personas distintas. Eliminando la no degeneración, las tres propiedades restantes describen una pseudométrica. En el sentido en el que se describe antes, la afinidad política se mide a través de una pseudométrica.

Si se elimina la simetría de una pseudométrica se obtiene una métrica de Lawvere [9], a la que llamaremos también una proximidad y representaremos mediante  $\rho$ . En un espacio de Lawvere, dados dos puntos  $x, y$ , no necesariamente ocurre que  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ . El ejemplo típico al que recurre William F. Lawvere para ilustrar su propuesta es la de una escalera y la acción de subir o bajar por ella. El consumo energético requerido para subir difiere significativamente del que se necesita para el descenso.



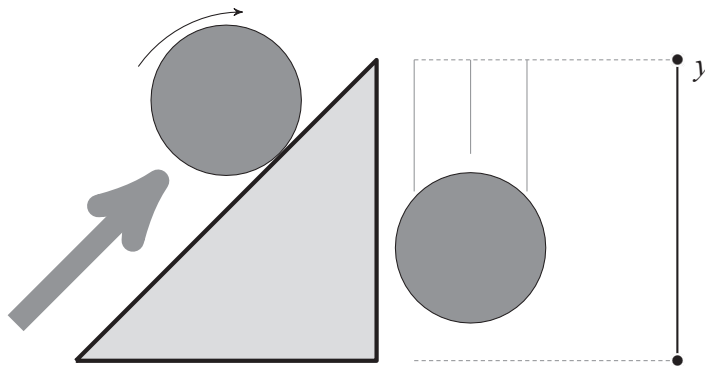
### Matematizando la interacción

El amor fluye de Ramón hacia Fuensanta y la “lejanía” lo hace en sentido contrario. El hecho puede visibilizarse mediante una gráfica dirigida, llamada también precategory, donde la orientación de la arista dirigida representa lejanía. Fuensanta es lejana a Ramón y éste es próximo a aquella. En un diagrama de Hasse la orientación es tácita y se asume como ascendente. En la figura que sigue se ilustran ambas expresiones gráficas.



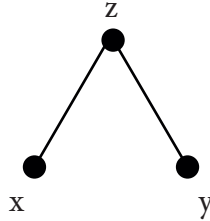
Tenemos en la figura anterior dos propuestas de nomenclatura. Por comodidad, en matemáticas se elige la opción en la parte inferior de la ilustración previa. Las literales como  $x$  son más sucintas, permitiendo la concentración en lo estrictamente matemático. Fuensanta es un bonito nombre, pero es largo e incómodo para ser manipulado.

Teniendo en cuenta la convención simbólica recién descrita proponemos la función de proximidad como  $\rho(x, y) = 1$  y  $\rho(y, x) = 0$ , con la siguiente justificación intuitiva: subir un peso requiere esfuerzo, pero para hacerlo descender basta dejar actuar a la gravedad.



### Un amor complicado

En la novela clásica del escritor español Fernando de Rojas (1470 - 1541) *La Celestina*<sup>1</sup>[46] relata un romance que, si bien termina siendo simétrico, se enfrenta con circunstancias y obstáculos interesantes. Luego de un accidental encuentro, Calisto queda prendado de Melibea quien lo rechaza, por lo que el joven recurre a los servicios de Celestina, una hechicera local. Gracias a un conjuro de la intermediaria, Melibea descubre en Calisto al amor de su vida. El final es trágico, pero para nuestros fines lo relatado es suficiente. Calisto ( $x$ ) y Melibea ( $y$ ) constituyen una pareja de amantes luego de recurrir, directa o indirectamente, a la intervención de Celestina ( $z$ ).



En nuestro modelo  $\rho(x, y) = \rho(y, x) = \rho(x, z) = \rho(y, z) = 1$ , en tanto que:  $\rho(z, x) = \rho(z, y) = 0$ , lo que define la función de proximidad.

$\rho$	$x$	$y$	$z$
$x$	0	1	1
$y$	1	0	1
$z$	0	0	0

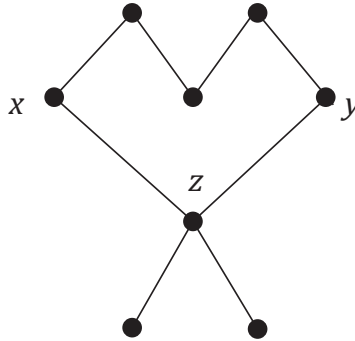
La tabla anterior resume esta información. La función de proximidad anterior es, como puede verificarse con facilidad una métrica de Lawvere sobre el conjunto  $X = \{x, y, z\}$ , es decir, es regular y satisface la desigualdad del triángulo.

El modelo puede ser aplicado a una gráfica orientada (precategoria) arbitraria, definiendo una función de proximidad  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{N}$  como sigue:

1.  $\rho(x, x) = 0$  para todo  $x \in X$ ;
2. Si  $x$  es el extremo inferior de una arista cuyo extremo superior es  $y$ , entonces  $\rho(x, y) = 1$  y  $\rho(y, x) = 0$ ;

3. En general,  $\rho(x, y)$  es la mínima suma de las proximidades que conectan a  $x$  con  $y$ .

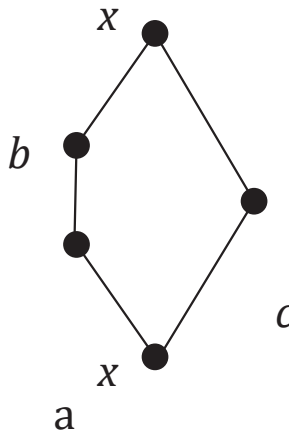
Para ilustrar la definición, observemos el diagrama siguiente.



Como puede verificarse:

$$\rho(a, x) = \rho(a, y) = 2, \rho(x, a) = \rho(y, a) = 0 \text{ y } \rho(x, y) = \rho(y, x) = 1.$$

Se invita cordialmente al lector a calcular otros valores para nuestra función de proximidad, por ejemplo:  $\rho(a, z)$  y  $\rho(z, a)$ .



En el diagrama previo,  $\rho(x, y) = 2$ , porque es la “longitud” de la cadena más corta que los conecta. Sin embargo, lo realmente importante en el diagrama, para ciertas situaciones, es la posición relativa de los vértices. Bastaría pues definir  $\lambda(x, y) = 1$  siempre que  $\rho(x, y)$  sea positivo. La suma aritmética se transforma en una suma lógica o disyunción ‘V’, conservando aún lo esencial de las posiciones relativas. La conjunción es verdadera si al menos una de las premisas lo es y es falsa si ambas lo son, es decir:

$$1 \vee 1 = 1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \text{ y } 0 \vee 0 = 0.$$

$$\begin{array}{ll} \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) = 3 & \lambda(x, a) \vee \lambda(a, b) \vee \lambda(b, y) = 1 \\ \rho(x, c) + \rho(c, y) = 2 & \lambda(x, c) \vee \lambda(c, y) = 1 \\ \rho(y, b) + \rho(b, a) + \rho(a, x) = 0 & \lambda(y, b) \vee \lambda(b, a) \vee \lambda(a, x) = 0 \\ \rho(y, c) + \rho(c, x) = 0 & \lambda(y, c) \vee \lambda(c, x) = 0 \end{array}$$

Es sencillo observar que esta nueva operación booleana\* o lógica permite conservar la desigualdad del triángulo, ya que, por ejemplo, mientras que:

$$2 = \rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, y) = 3$$

en tanto que también ocurre que  $1 = \lambda(x, y) \leq \lambda(x, a) + \lambda(a, y) = 1$ . Una posible interpretación es que la métrica de Lawvere  $\lambda$  es la versión homotópica\*\* de la métrica de Lawvere  $\rho$ .

Otras interacciones humanas, como los roles de género en una tribu de Papúa Nueva Guinea, han sido estudiadas mediante grupos Booleanos [11] por el antropólogo Per Hage (1935 - 2004) y el matemático Frank Harary (1921 - 2005).

---

\*. Relativo a George Boole (1815-1864).

\*\* . La Homotopía es la teoría topológica que se encarga de la deformación continua.

## Proximidad y orden

Si se define la relación ' $\preceq$ ' sobre el conjunto  $X$  de los vértices de una pre-categoría mediante  $a \preceq b$  si, y solo si,  $\rho(b, a) = 0$ , obtenemos un preorden, es decir, una relación reflexiva y transitiva. La relación es reflexiva porque  $x \preceq x$  para todo  $x \in X$ , producto de que  $\rho(x, x) = 0$ ; y es transitiva porque  $x \preceq y \preceq z$  implica  $x \preceq z$  debido a la desigualdad del triángulo.

Con el fin de simplificar, evitaremos situaciones en las que dos puntos distintos satisfacen  $\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0$  que llevarían a  $x \preceq y$  con  $y \preceq x$  pero  $x = y$  no se satisface.



Eliminando situaciones como la descrita, el preorden se convierte en un orden parcial, introduciendo la propiedad conocida como antisimetría, y usando ahora la más popular notación  $x \leq y$ , en lugar de la recién introducida  $x \preceq y$ .

Una de las variantes más sencillas de orden es el orden total, que es un orden parcial con la propiedad de tricotomía, es decir, dados dos elementos  $x, y$ , al menos una de las dos relaciones  $x \leq y$  ó  $y \leq x$  se verifica. Una cadena finita como:

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n$$

Es un buen ejemplo de orden total. La anterior es una  $n$ -cadena porque tiene  $n$  aristas y  $n + 1$  vértices.

Una ruta de transporte o una clasificación deportiva al igual que muchas otras situaciones que pueden venir a la imaginación se ajustan a un modelo de orden total o cadena. Consideremos un conjunto  $K = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  cuyos elementos representan opciones, candidatos o partidos en algún sistema electoral. Una preferencia electoral es una permutación de  $K$ , es decir, un orden total sobre  $K$ . El conjunto de las preferen-

cias electorales es el grupo de permutaciones  $S(K)$ . Si  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  es el conjunto de los electores, y un sufragio  $\sigma : E \rightarrow S(K)$  es una función que a cada elector le asigna su preferencia electoral. El conjunto de los sufragios será denotado como  $S(K)^E$ .

La regla de agregación es una función  $\varphi : S(K)^E \rightarrow S(K)$ , es decir, que a cada sufragio le asigna una preferencia electoral a la que llamaremos elección. Esta última preferencia electoral, que en algunos textos se conoce como constitución [7], es el resultado de un proceso electoral.

A través de esta modelación de los sistemas electorales es posible [15, 16] demostrar el Teorema de Arrow\* que, en términos muy generales afirma que toda democracia puede “deformarse continuamente” en una dictadura [4].

## Y la topología se hizo

Dados una precategoría  $X$ , un elemento  $x \in X$  y la métrica de Lawvere  $\lambda$ , tenemos que el conjunto

$$U_x = \{a \in X \mid \lambda(x, a) = 0\}$$

es no vacío porque mínimamente  $x \in U_x$ . Notemos que la definición anterior es equivalente con

$$U_x = \{a \mid a \leq x\}.$$

Provisionalmente, llamaremos a  $U_x$  la vecindad mínima de  $x$ , y diremos que un conjunto abierto es cualquier unión de vecindades mínimas. De esta forma,  $X$  es un conjunto abierto por ser la unión de todas las vecindades mínimas y  $\emptyset$  es también abierto, puesto que es la unión de una colección vacía de vecindades mínimas. Evidentemente toda vecindad mínima es también un conjunto abierto.

---

\*. Keneth Arrow (1921 - 2017), premio Nobel de Economía 1972

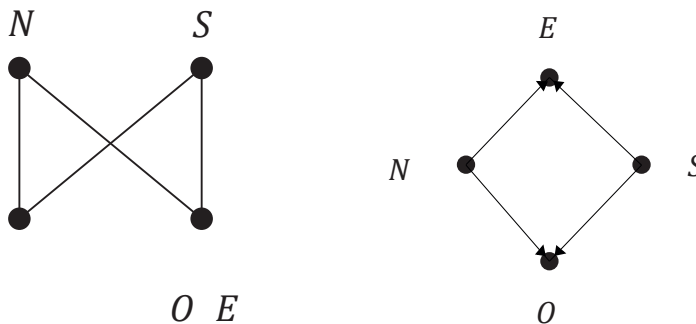
Si  $z \in U_x \cap U_y$ , entonces es claro que  $U_z \subseteq U_x \cap U_y$ , ya que si  $a \in U_z$ , entonces  $a \leq z \leq x$  y  $a \leq z \leq y$ , de manera entonces que  $U_x \cap U_y$  es la unión de los  $U_z$  tales que  $z \in U_x \cap U_y$ .

Esto describe la colección  $\tau$  de los conjuntos abiertos como una topología sobre  $X$ . Con un poco más de trabajo observamos que toda intersección de abiertos es también un conjunto abierto, por lo que esta topología  $\tau$  es una topología de Alexandroff, y el par  $(X, \tau)$  es un espacio de Alexandroff.

Toda topología finita es de Alexandroff y también lo es toda topología sobre un conjunto finito. El espacio  $(X, \tau)$  donde  $X$  es un conjunto finito se dice que es un espacio finito, y un tema vigoroso de investigación matemática es la clasificación de los espacios topológicos finitos [12], y como vemos, se dispone de una buena cantidad de herramientas matemáticas para su abordaje.

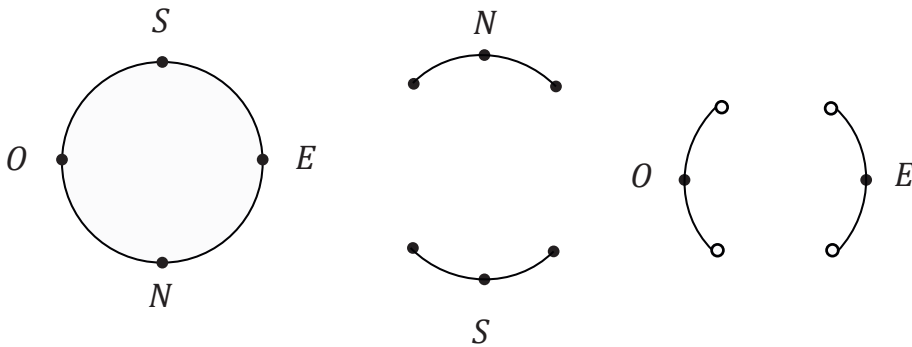
Hasta donde se sabe a la redacción del presente trabajo, se han clasificado las topologías sobre conjuntos finitos de hasta 19 elementos [12], lo que es equivalente a clasificar los preórdenes, o si se prefiere las métricas de Lawvere o las precategorias.

Volviendo a la topología, un conjunto es un conjunto cerrado si es el complemento de un conjunto abierto. El conjunto de referencia  $X$  y el vacío son ambos cerrados, dado que uno y otro son abiertos. Si  $x$  es minimal sobre el conjunto preordenado  $X$ , entonces  $\{x\} = Ux$  es un conjunto abierto, y si es maximal, y por consiguiente  $\{x\} = Fx$  es cerrado. Entonces, en el diagrama siguiente  $\{E\}$  y  $\{O\}$  son abiertos, mientras que  $\{N\}$  y  $\{S\}$  son cerrados.

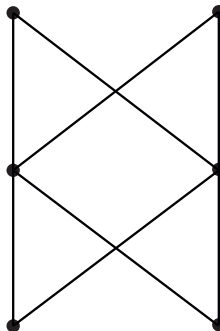


A la derecha se expresa el mismo orden parcial como una precategorya, revelando en parte el porqué de la simbología elegida. El diagrama de Hasse de la izquierda es un modelo finito, y de hecho es el modelo mínimo [5] para la 1-esfera  $S^1$ , que identificamos habitualmente como la circunferencia de radio 1.

La inclusión en la circunferencia, como se muestra en la figura de abajo, revela una equivalencia homotópica entre nuestro modelo y  $S^1$ . Sin entrar en detalles técnicos, lo que hacemos es hacer coincidir abiertos con abiertos y cerrados con cerrados.



La ventaja de los modelos finitos es que podemos estudiar objetos de dimensión positiva a través de conjuntos relativamente pequeños de puntos, y las relaciones de orden entre ellos. Se posibilita así el uso extensivo de herramientas computacionales. Si los modelos finitos son además modelos mínimos, se reduce adicionalmente el tiempo de máquina necesario.



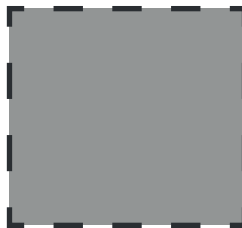
El diagrama de Hasse anterior es el modelo mínimo de la 2-esfera  $S^2$ , y seguramente el lector estará feliz de encontrar los detalles por sus propios medios.

## Imágenes y proximidad

El tratamiento digital de imágenes es un asunto fundamental de la vida moderna. La fotografía se ha transformado de forma revolucionaria desde los primeros intentos de Niépce y Daguerre. Cada imagen plana se compone de pequeñas unidades cuadradas conocidas como píxeles[59]. El color es homogéneo en el interior de cada pixel, y el contorno debe ser congruente con el color de los píxeles vecinos. Llamaremos color al interior del pixel, de manera que cada pixel consiste del color y su contorno.



*pixel*

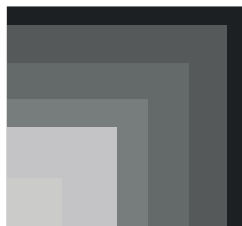


*color*

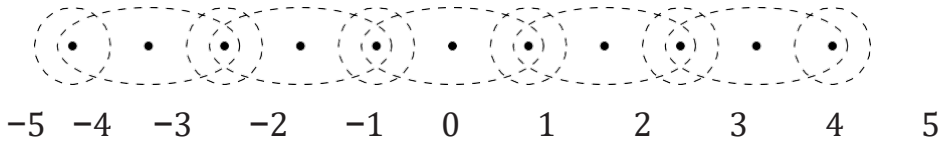


*contorno*

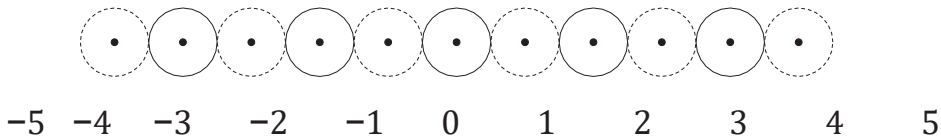
En un plano digital cada conjunto abierto es la unión de colores junto con la parte de los contornos que es común a más de uno.



Esto define la topología digital del plano y fue descrita por primera vez [1] en 1935 por Pavel Alexandroff (1896-1982) y Heinz Hopf (1893-1971). En 1937, Alexandroff publica un trabajo seminal [2] sobre una clase más general de espacios, que hoy conocemos como espacios de Alexandroff. Para hacer más clara la construcción de esta topología, la describiremos primero sobre la recta entera. Los abiertos básicos tienen la forma  $\{2k - 1, 2k, 2k + 1\}$  y  $\{2k + 1\}$ , de manera que todo intervalo de enteros con extremos impares es abierto.

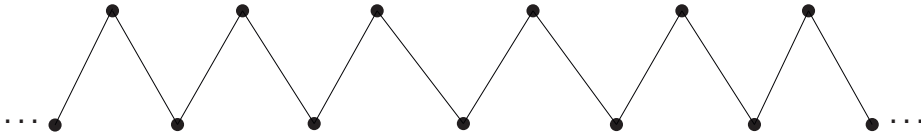


El color está contenido en un impar y el contorno es par. Dicho de otra manera, los impares son abiertos y los pares son cerrados.

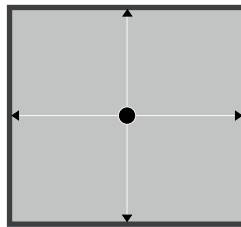


En una gráfica orientada, los impares son emisores y los pares receptores.

El diagrama de Hasse correspondiente es como sigue, donde los impares son minimales y los pares maximales.



La topología digital del plano es el producto de dos copias de la topología digital sobre la recta. La gráfica orientada sobre cada pixel se vería como en la ilustración siguiente.

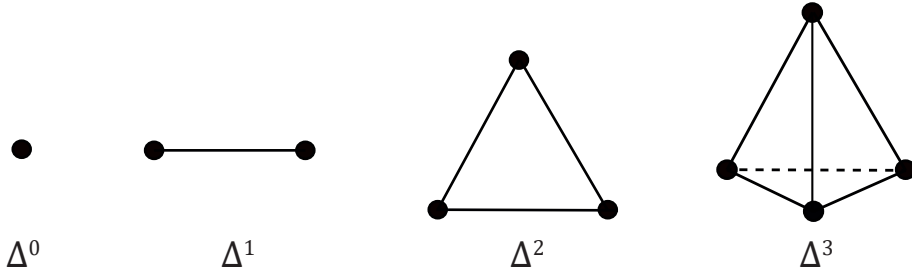


Se llama segmentación de imágenes digitales al proceso mediante el cual se elimina el “ruido”, conservando la verdadera información relevante. La imaginación nos conduce a pensar en el uso de estos conceptos con fines artísticos, médicos y lúdicos.

## De ida y vuelta

Los espacios de Alexandroff se codifican como diagramas de Hasse, y éstos a su vez admiten, como ya hemos visto, diversas representaciones. Antes de continuar necesitaremos algunas definiciones adicionales. Un simplejo o símplice es básicamente un triángulo generalizado, por decirlo de alguna manera, es un poliedro convexo minimal en cada dimensión. Un 0-simplejo es un punto, un 1-simplejo un segmento de

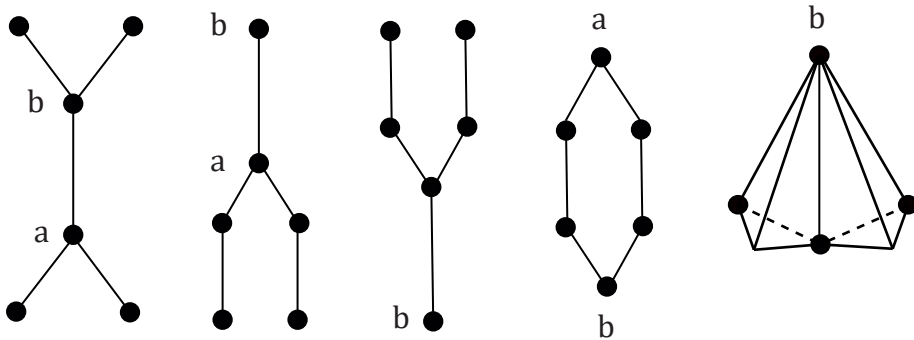
recta, un 2-simplejo un triángulo, un 3-simplejo un tetraedro y así sucesivamente.



Un  $n$ -simplejo es el mínimo convexo que contiene  $n + 1$  puntos que no se encuentran sobre el mismo  $n$ -plano. Eliminando un vértice se obtiene una  $(n - 1)$ -cara, y así, eliminando  $m$  vértices obtenemos una  $(n - m)$ -cara, para  $0 \leq m \leq n$ . Un complejo simplicial  $K$  es un conjunto de simplejos que contiene todas las caras de cada uno de sus elementos. La unión  $K = \cup K$  es un poliedro, y se dice que es la realización de  $K$ .

Un  $n$ -simplejo cuyos vértices son los elementos de  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , se denota mediante  $[x_0, x_1, \dots, x_n]$  y no es complicado advertir que este simplejo puede asociarse con la cadena  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ . Un diagrama de Hasse que contiene una cadena contiene también todas sus subcadenas, de manera que entender una precategoría como un complejo simplicial no es descabellado.

Una cadena es contráctil, como lo es el simplejo que la representa, de tal suerte que una precategoría tiene el mismo tipo de homotopía que su complejo simplicial asociado. En la figura siguiente se observan cuatro diagramas de Hasse que se codifican en el mismo complejo simplicial, todos ellos contráctiles.



Mediante esta identificación, es posible asociar invariantes algebraicos a un espacio de Alexandroff, tales como grupos de homotopía [5] y otros invariantes homotópicos, entre ellos, la homología simplicial [17] y la singular [13]. En reciprocidad, dado un complejo simplicial, se obtiene un espacio de Alexandroff, de varios posibles, conservando sus propiedades homotópicas.

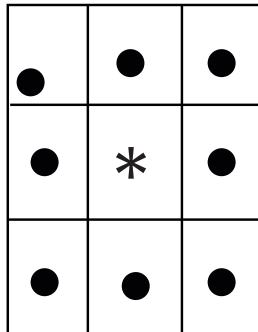
### Persistencia y proximidad

Un tumor es una masa de tejido que presenta anormalidades en su crecimiento y otras características. La detección y ubicación precisa se logra a través de imagenología. Una técnica frecuente es la tomografía contrastada, en la que se administra al paciente una sustancia, conocida como medio de contraste, con el fin de resaltar los detalles de importancia médica.

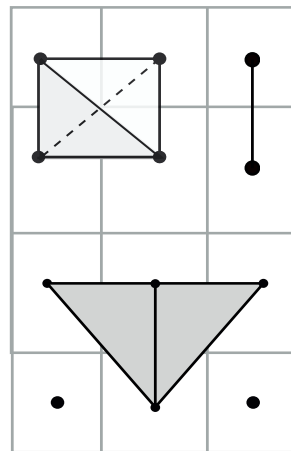
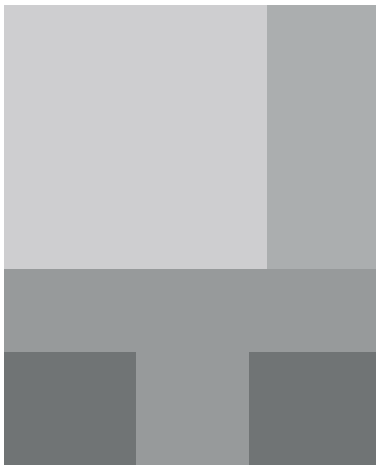
Una vez que un tumor es detectado, el paso siguiente es determinar si es o no maligno, es decir, si representa alguna forma de cáncer. La extracción de una muestra para ser estudiada, procedimiento diagnóstico conocido como biopsia, es la opción más frecuente, pero se presentan caso en los que la biopsia es tan riesgosa como la extracción misma por circunstancias de índole diversa.

En casos tales, la imagenología es el recurso de diagnosis preferente, y entonces, para observar el comportamiento de la lesión tumoral a

través del tiempo, se practican varias placas a intervalos regulares de tiempo. El color al igual que el tono de la lesión informa sobre su naturaleza, y el cambio de color en el transcurso proporciona datos de su evolución. La homología persistente es un método matemático para el estudio de fenómenos evolutivos como el descrito. Para el efecto, consideramos los pixeles periféricos, marcados con un punto, como adyacentes al pixel marcado con un asterisco.



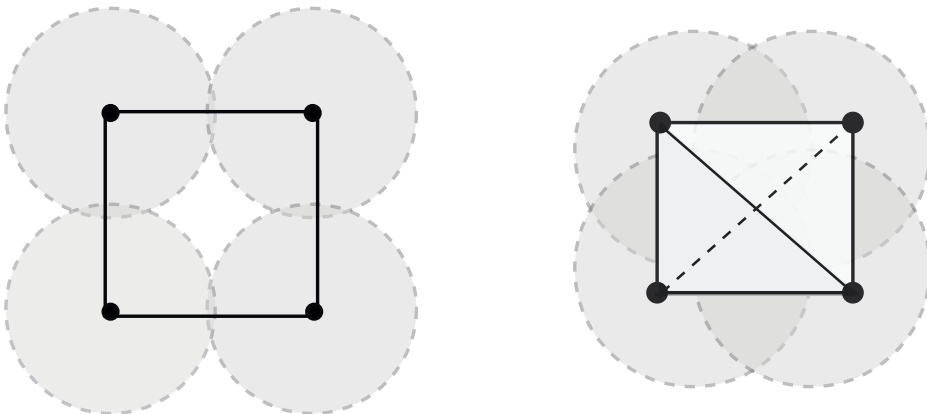
Uniendo mediante una arista dos pixeles adyacentes que tengan el mismo tono se obtiene un complejo simplicial asociado con el tipo de lesión correspondiente. La siguiente ilustración muestra un ejemplo muy simplificado.



Cada tomografía tiene un complejo asociado, que a su vez tiene invariantes algebraicos llamados grupos de homología, cuya información se codifica en diagramas conocidos como códigos de barras por su semejanza con los códigos gráficos que identifican mercancías. Dos códigos de barras se comparan a través de la llamada métrica de coincidencia. De esta manera se identifica el nivel de avance o retroceso de la tumoración. Procesos sociales como la conformación de grupos políticos, el terrorismo y muchos otros, admiten un tratamiento semejante.

La colección ordenada de grupos de homología se llama homología persistente, idea introducida por Gunnar Carlsson [6]. Se usa también en la segmentación de imágenes bajo la idea de que lo que persiste es información significativa, mientras que lo que “muere” es ruido.

En la Ingeniería, hay también una muy nutrida cantidad de usos posibles. En telefonía celular, por ejemplo, cada “celda” es el territorio cubierto por la señal de una antena dada, la migración (roaming) de una antena vecina a otra se representa por una arista, construyendo un complejo simplicial, al que se conoce como el complejo de Vietoris-Rips [8], en honor de Leopold Vietoris (1891 - 2002) y Eliyahu Rips. Los “huecos” en la cobertura son detectados por los grupos de homología de los complejos obtenidos, contribuyendo a la toma de decisiones técnicas.



Las posibilidades son múltiples y, como ya observamos, un complejo simplicial puede codificarse como un espacio de Alexandroff, conservando su homotopía, y en consecuencia su homología.

Los espacios de Alexandroff aparecen a la vuelta de cualquier esquina.

## Referencias

- [1] Alexandroff, P.; Hopf, H. *Topologie*. Springer Verlag. (1974). Berlín. (En alemán, reimpresión del original publicado en 1935).
- [2] Alexandroff, P. (1937). “Diskrete Räume”. *Mat. Sb. New Series* (en Alemán). 2, 501-518.
- [3] Arenas, F. G. (1999). “Alexandroff spaces”. *Acta Math. Univ. Comeniana*. 68(1), 17-25.
- [4] Arrow, K. J. (1951). *Social Choice and Individual Values*. John Wiley & Sons. New York.
- [5] Barmak, J. (1910). *Algebraic Topology of finite topological spaces and applications*. Springer Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*. 203[71]2. Berlín.
- [6] Carlsson, G.; Carlsson, L.; De Silva, V. (2006). “An algebraic topological method for feature identification”. *International Journal of Computational Geometry and Applications*. 16 (4) 291-314.
- [7] Chichilniski, G.; Heal, G. (1983). “Necessary and sufficient conditions for a resolution of the social choice paradox”, *Journal of Economic Theory*, 31(1), 68-87.
- [8] De Siva, V.; Ghirst, R. (2007). “Coverage in sensor networks via persistent homology”. *Algebr. Geom. Topol.* 7 (1), 339-358.
- [9] Fong, B.; Spivak, D. I. (2018) *An invitation to Applied Category Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] Fugacci, U.; et. al. (2016). “Persistent homology: a step-by-step introduction for newcomers”. *Smart Tools and Apps in computer Graphics 1* -(math.uri.edu)
- [11] Hage, P.; Harary, F. (1983). “Harapesh sexual symbolism, primitive thought and Boolean groups”. *L’Homme*, Jun. 57-77.
- [12] May, P. (1914). “Finite spaces and larger contexts”. *Universisy of Chicago Notes preliminares*, (math.uchicago.edu).
- [13] McCord, M. C. (1966). “Singular homology and homotopy groups of finite topological spaces”. *Duke Mathematical Journal*. 33 (3), 465 - 474.

- [14] Pérez, J. A. & Solís. (2021). “El corazón de un espacio de Alexandroff”. *Lecturas Matemáticas*, 42(1), 5-25.
- [15] Pérez, J. A. & Solís. (2021). “Basic Properties of Alexandroff Spaces”. *Abstraction & Application*, 34, 1-12.
- [16] Pérez, J. A. & Solís. (2022). “Some Categories of Alexandroff Spaces”. *Memoirs Graph Operado Logic 2021*, Elsevier, 124-142.
- [17] Poincaré, H. (2009). *Papers on Topology*. American Mathematical Society, Rhode Island.
- [18] Speer, T. (2007). “A short study of Alexandroff spaces”. arXiv: 0708.2136



# Una invitación a la homología simplicial

*Miguel A. Maldonado Aguilar*  
*Oscar Germán Robles Torres*

## Resumen

En el presente trabajo se ofrece una breve introducción a la homología simplicial, iniciando por el concepto de complejo simplicial, las propiedades de los grupos de homología, así como a través de cálculos explícitos. 2010 Mathematics Subject Classification: 55N35, 57M50.

Palabras Clave: homología, complejo simplicial, análisis topológico de datos.

## Introducción

El concepto de homología, concretamente los grupos de homología, surgió con la necesidad de desarrollar invariantes topológicas que permitieran, entre otras cosas, clasificar espacios. Aunque existen distintos enfoques a la homología, el primero en surgir fue el relacionado con triangulaciones de espacios. De hecho, en 1899, H. Poincaré publicó una prueba de su Teorema de la Dualidad usando una triangulación para una variedad cerrada orientada (Weibel, 1999); esto dio lugar a la teoría de homología simplicial. En la actualidad la homología simplicial ha despertado un especial interés dentro y fuera de las matemáticas por

sus aplicaciones en áreas como la ciencia de datos, las redes de comunicación y las neurociencias, por mencionar algunas; (véase Ghirst, 2014).

El trabajo está dividido en tres partes principales que describimos a continuación. La primera presenta el concepto de simplejo orientado y complejo simplicial, que es el objeto combinatorio en el que se trabajará. En la segunda parte se introduce el concepto de grupo de homología, sus propiedades, así como un primer cálculo explícito. La última parte del trabajo está dedicada a mostrar cálculos explícitos de grupos de homología de ciertas superficies familiares dentro de la topología.

## Complejos simpliciales

Un **n-simplejo orientado** en  $\mathbb{R}^m$  es una secuencia de puntos distintos  $P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1}$  de  $\mathbb{R}^m$ , con  $m \geq n$ . Esto es, consideramos

$$P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1} = \begin{cases} P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_n} P_{i_{n+1}}, & \text{si } \tau \text{ es par} \\ -P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_n} P_{i_{n+1}}, & \text{si } \tau \text{ es impar} \end{cases}$$

para una permutación  $t(j)=i$ , en grupo simétrico de  $n+1$  letras. Notemos que si los puntos considerados son colineales entonces la definición anterior puede derivar en líneas, las cuales son llamadas **simplejos degenerados**.

De la definición anterior se obtiene que un **0-simplejo** es un punto de  $\mathbb{R}^m$ , un **1-simplejo orientado** es un segmento dirigido determinado por dos puntos y un **2-simplejo orientado** es un triángulo con una orientación en sus lados.

La **frontera** de  $P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1}$  se define como:

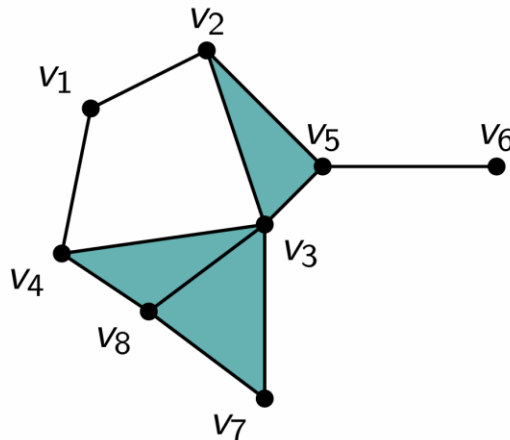
$$\partial n ( P_1 P_2 \dots P_n P_{n+1} ) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} s_i$$

donde  $s_i$  es el  $(n-1)$ -simplejo orientado que resulta de omitir a  $P_i$  en la secuencia ordenada original. En la expresión anterior, cada sumando  $(-1)^{i-1} s_i$  es llamado una cara del  $n$ -simplejo.

Un complejo **simplicial**  $X$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$  dado por la unión de simplejos orientados que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Cada punto de  $X$  pertenece a un número finito de simplejos.
2. Para un simplejo que esté en  $X$ , todas sus caras también lo están.
3. Dos simplejos de  $X$  o tienen intersección vacía, o se intersectan en una cara en común.

En el presente trabajo trataremos únicamente con complejos simpliciales **finitos**; es decir, complejos que consisten de un número finito de simplejos. La **dimensión** de un complejo simplicial  $\dim(X)$  se define como la dimensión más grande de los simplejos que lo componen. Es común llamar **vértices** de  $X$  a los 0-simplejos de  $X$ , **aristas (orientadas)** a los 1-simplejos orientados y **caras** a los 2-simplejos orientados. A continuación, tenemos un ejemplo de un complejo simplicial de dimensión 2.



Definimos el grupo de **n-cadenas** de un complejo simplicial  $X$  como el grupo abeliano libre  $C_n(X)$  generado por el conjunto  $\{\sigma_n^1, \sigma_n^2, \dots, \sigma_n^{\alpha_n}\}$  de los  $n$ -simplejos orientados de  $X$ . Es decir,  $C_n(X)$  consiste de combinaciones lineales

$$m_1\sigma_n^1 + m_2\sigma_n^2 + \dots + m_{\alpha_n}\sigma_n^{\alpha_n},$$

donde  $m_i \in \mathbb{Z}$ . Por definición  $C_n(X)$  es el grupo trivial para  $n < 0$ .

Extendemos la definición de frontera a un **homomorfismo frontera**  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  mediante

$$\partial_n\left(\sum_i m_i \sigma_n^i\right) := \sum_i m_i \partial_n(\sigma_n^i),$$

donde  $\partial_n(\sigma_n^i)$  es la frontera que se definió antes.

Con esto obtenemos una sucesión de grupos y homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \dots$$

Llamado el complejo de cadenas simpliciales de  $X$ .

## Homología simplicial

Dos subgrupos de  $C_n(X)$  serán de gran importancia: **el grupo de n-ciclos**  $Z_n(X)$ , definido como el kernel de  $\partial_n$ , y el grupo de **n-fronteras**  $B_n(X)$ , definido como la imagen de  $\partial_{n+1}$ . El siguiente hecho marca el inicio del análisis homológico que queremos mostrar, pues muestra la relación

entre ciclos y fronteras: Para un complejo simplicial  $X$  y toda  $n$ -cadena  $C \in C_n(X)$  se satisface que  $\partial_{n-1}(\partial_n(C))=0$  para cada entero no negativo  $n$ . A partir de esta propiedad podemos observar que  $B_n(X)$  es subgrupo de  $Z_n(X)$  para cada entero no negativo  $n$ . Esto permite definir el **grupo de homología simplicial de dimensión  $n$  de  $X$**  como el cociente

$$H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$$

Los elementos en este cociente tienen la forma  $z+B_n(X)$ , para  $z \in Z_n(X)$  llamamos a dicha clase lateral la **clase de homología de  $z$** . Si para otro ciclo  $z' \in Z_n(X)$  se tiene que  $z' \in z+B_n(X)$  entonces se dice que  $z$  y  $z'$  son **ciclos homólogos**.

Los grupos de homología  $H_n(X)$  de un complejo simplicial permiten hacer una lectura del mismo a distintas escalas pues cada grupo refleja ciertas propiedades geométricas de  $X$ . Los elementos no nulos de  $H_n(X)$  son clases de ciclos que no son fronteras, es decir elementos  $z \in C_n(X)$  con  $\partial(z)=0$  tales que  $z \notin \text{im}(\partial_{n+1})=B_n(X)$ . Por ejemplo, el cociente  $H_1(X)$  consiste de aquellos 1-ciclos, es decir combinaciones lineales de aristas del complejo simplicial  $X$ , tales que no son la frontera de ninguna 2-cadena, esto es, no son frontera de ninguna combinación lineal de caras triangulares. En general el cociente  $H_n(X)$  consiste de aquellos  $n$ -ciclos que no son imagen de  $(n+1)$ -simplejos.

Notemos que  $H_q(X)$  es trivial para cada  $q > \dim(X)$ .

**Ejemplo 3.1** Consideremos el 1-simplejo  $X=P_1 P_2$ . Dado que  $\dim(X)=1$ , se tiene que  $C_n(X)=0, \forall n \geq 2$ . De esto se obtiene que  $H_n(X)=Z_n(X)/B_n(X) \cong 0, \forall n \geq 2$ . Por otro lado, al haber un único 1-simplejo se sigue que

$$C_1(X)=\{a P_1 P_2: a \in \mathbb{Z}\}\mathbb{Z}$$

Para los únicos 0-simplejos  $P_1$  y  $P_2$  se sigue que

$$C_0(X) = \{aP_1 + bP_2 : a, b \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Con esto se obtiene que el complejo de cadenas simpliciales tiene la siguiente forma:

$$0 = C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

de aquí se desprende que  $Z_0(X) = \ker(\partial_0) = C_0(X)$ . Por otro lado:

$$B_0(X) = \partial_1(C_1(X)) = \{a(P_2 - P_1) : a \in \mathbb{Z}\} \subseteq C_0(X)$$

por lo que  $B_0(X) \cong \mathbb{Z}$ , con generador  $P_2 - P_1$ . Para calcular  $H_0(X) = Z_0(X) / B_0(X)$  tomamos la clase  $z + B_0(X)$ , con  $z = aP_1 + bP_2$ . Para el elemento  $-b(P_2 - P_1) \in B_0(X)$  se tiene

$$z + (-b(P_2 - P_1)) = (a + b)P_1 \in z + B_0(X)$$

Así  $z + B_0(X) = (a + b)P_1 + B_0(X) = a'P_1 + B_0(X)$ , con  $a' \in \mathbb{Z}$ .

De aquí  $H_0(X) = \{aP_1 + B_0(X) : a \in \mathbb{Z}\}$ ; más aún, eligiendo a los elementos  $aP_1$  como representantes de cada clase tendremos que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, consideremos  $z = aP_1 - P_2 \in Z_1(X) = \ker(\partial_1)$ , notemos que  $\partial_1(z) = 0$  sí y sólo si  $a(P_2 - P_1) = -aP_1 + aP_2 = 0$ , lo cual es cierto únicamente para  $a = 0$ ; de aquí  $Z_1(X) = 0$ . Finalmente, dado que  $B_1(X)$  es trivial obtenemos que  $H_1(X) = Z_1(X) / B_1(X) \cong 0$ .

El hecho de que casi todos los grupos de homología en este caso resultaran triviales muestra que el complejo simplicial no tiene mucha información geométrica. El cálculo  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  puede ser interpretado en términos de conexidad para cualquier otro complejo simplicial: si dos puntos  $P, Q$  pertenecen a la misma componente conexa es posible construir una 1-cadena  $c$  tal que  $\partial_1(c) = Q - P$ , es decir, son homólogos. Al realizar este análisis en cada componente conexa se obtiene que el grupo de

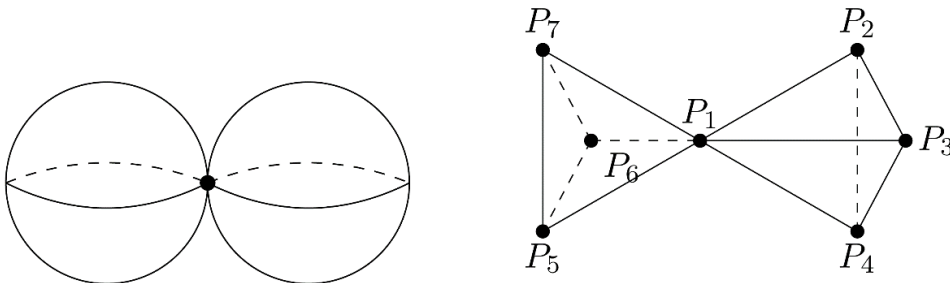
homología en dimensión cero es una suma directa de tantas copias de  $\mathbb{Z}$  como componentes conexas tenga; véase (Giblin, 2010), Prop. 4.10.

Si un espacio topológico  $X$  es homeomorfo a un complejo simplicial  $Y$  entonces se dice que  $Y$  es una **triangulación para  $X$** . Aunque, en general, un espacio puede tener diversas triangulaciones lo interesante de esta definición es que cualquier triangulación exhibe propiedades geométricas del espacio, reflejadas a través de la homología. Bajo estas condiciones se definen los grupos de homología de  $X$  como aquellos de  $Y$ ; es decir,  $H_n(X) := H_n(Y)$ ,  $\forall n$ . Más aún, tenemos que si  $Y, Y'$  son triangulaciones para un mismo espacio entonces  $H_n(Y) \cong H_n(Y')$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_{+0}$ . Como consecuencia de esto tenemos que los grupos de homología son un invariante topológico, una de las propiedades que la hace un invariante de gran interés (véase (Prasolov, 2007), Sec. 1.2). Es decir, si  $X$  y  $X'$  son homeomorfos, entonces  $H_n(X) \cong H_n(X')$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_{+0}$ .

## Cálculos explícitos

Como se mencionó antes, los cocientes que definen a los grupos de homología  $H_*(X)$  reflejan el comportamiento de los simplejos de dimensiones cercanas; en particular, encontrar generadores para cierto grupo de homología equivale a encontrar un ciclo, en la dimensión correspondiente, que no sea una frontera. Así, por ejemplo, a partir de la triangulación de la circunferencia unitaria  $S^1$  dada por tres vértices y tres aristas, los grupos de homología se calculan directamente:  $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong H_1(S^1)$ ,  $H_n(S^1) = 0$ ,  $\forall n \geq 2$ . De igual forma, la triangulación de la 2-esfera  $S^2$  que consiste de un tetraedro hueco arroja los grupos de homología  $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z} \cong H_2(S^2)$ ,  $H_n(S^2) = 0$ ,  $\forall n \neq 0, 2$ ; véase (Fraleigh, 2003), Sec.4.2 para mayores detalles.

**Ejemplo 3.3** Sea  $X$  el espacio que consiste de dos 2-esferas tangentes (ver figura), y consideremos la triangulación que se muestra abajo.



Dado que  $X$  es arco-conexo se tiene que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . El grupo  $Z_1(X)$  es generado por los siguientes 1-ciclos:

$$\begin{aligned} z &= P_1P_3 + P_3P_4 + P_4P_1 & z &= P_2P_1 + P_1P_4 + P_4P_2 \\ z &= P_3P_2 + P_2P_4 + P_4P_3 & z &= P_6P_1 + P_1P_7 + P_7P_6 \\ z &= P_1P_5 + P_5P_7 + P_7P_1 & z &= P_5P_6 + P_6P_7 + P_7P_5 \end{aligned}$$

Puesto que estos ciclos son también elementos de  $B_1(X)$  se puede probar que  $Z_1(X) = B_1(X)$ , por lo que  $H_1(X)$  es trivial. Para calcular  $H_2(X)$  notemos que  $B_2(X) = 0$  pues  $C_3(X) = 0$ . Por otro lado,  $Z_2(X)$  es generado por los 2-ciclos

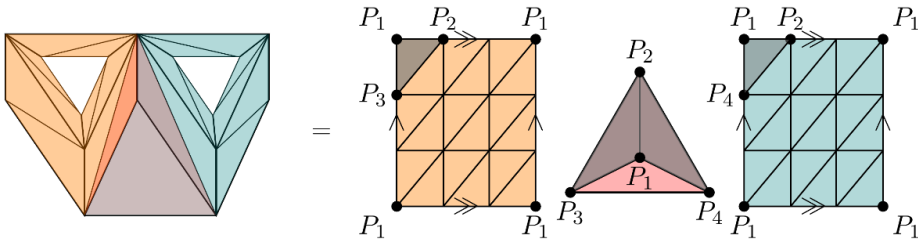
$$\begin{aligned} z &= P_5P_7P_1 + P_5P_1P_6 + P_1P_7P_6 + P_5 + P_6P_7 \\ z &= P_1P_4P_2 + P_1P_3P_4 + P_1P_2P_3 + P_2 + P_3P_4 \end{aligned}$$

los cuales son justo las sumas de las caras para cada tetraedro hueco en la triangulación. Luego:

$$H_2(X) = \frac{Z_2(X)}{B_2(X)} \cong Z_2(X) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

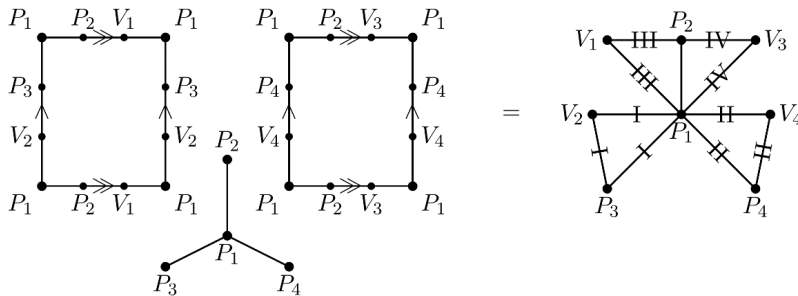
Los grupos de homología  $H_n(X)$  son triviales para  $n \geq 3$ , debido a que  $\dim(X)=2$ .

**Ejemplo 3.4** Consideremos a  $X$  la superficie del doble toro, y la triangulación que se muestra abajo.



En la figura  $P_1, P_2, P_3, P_4$  son los vértices de un tetraedro hueco y los 2-simplejos  $P_1 P_2 P_3$ ,  $P_1 P_2 P_4$  no forman parte del complejo simplicial. Los 2-simplejos se orientan en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Dado que  $X$  es arco-conexo, entonces  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . Por otra parte, para cada clase de homología  $z_1 + B_1(X) \in H_1(X)$  tomamos un representante  $z_1$  en el que sólo aparecen aristas de la siguiente figura



donde las aristas con el mismo número romano aparecen con el mismo coeficiente en  $z_1$ ; el coeficiente de  $P_1 P_2$  queda determinado por los de las otras aristas.

Usando a los elementos  $z_1'$  como representantes de las clases en  $H_1(X)$ , llegamos a que este tiene 4 generadores, los cuales son las clases laterales de los ciclos

$$P_1V_4 + V_4P_4 + P_4P_1, P_1P_3 + P_3V_2 + V_2P_1, \\ P_2V_3 + V_3P_1 + P_1P_2, P_1V_1 + V_1P_2 + P_2P_1.$$

De esto obtenemos que  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^4$ . Por otro lado, como la triangulación no contiene 3-simplejos,  $C_3(X)=0$  y  $B_2(X)=0$ ; así  $H_2(X) \cong Z_2(X)$ . El grupo de 2-ciclos  $Z_2(X)$  es generado por la 2-cadena que es suma de todos los 2-simplejos de  $X$  con coeficiente 1, por lo cual  $H_2(X) \cong Z_2(X) \cong \mathbb{Z}$ . Finalmente, como en el ejemplo anterior,  $H_n(X) \cong 0$  para  $n \geq 3$ .

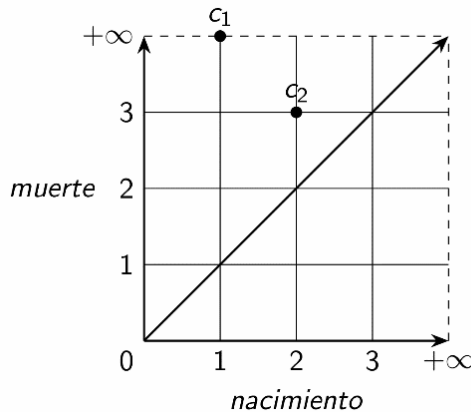
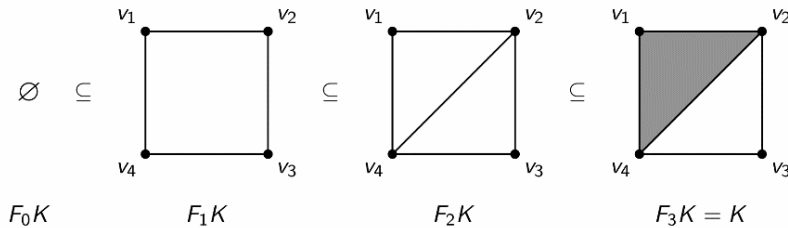
De los cálculos anteriores se sigue que si  $X$  es el doble toro, entonces  $H_1(X) \not\cong H_1(S^2)$ . Esto muestra que  $X$  y  $S^2$  no pueden ser superficies homeomorfas, un hecho que puede comprobarse visualmente pero su formalización sin herramientas de la topología algebraica no es nada trivial.

## Homología persistente

El análisis topológico de datos (TDA, por sus siglas en inglés) es un área de trabajo que se ha erigido como una herramienta de gran relevancia dentro de la ciencia de datos. En términos generales, la aplicación de conceptos y técnicas de la topología algebraica permite analizar bases de datos para detectar patrones en su representación visual (análisis conocido como shape of data); la homología simplicial resulta un candidato idóneo para realizar dicha tarea.

Llamamos **nube de datos** a una representación  $P$  de una base de datos como un conjunto de puntos en un espacio métrico, usualmente  $\mathbb{R}^3$ . Tomando los elementos de  $P$  como vértices es posible asociar una colección de complejos simpliciales  $F_0K \subseteq F_1K \subseteq \dots \subseteq F_nK$  llamada una filtración de  $P$ . Existen diversas maneras de construir estos complejos, las más comunes son los complejos de Cech, de Vietoris-Rips y de De-launay.

A cada complejo simplicial  $F_i K$  construido se le analiza a través del cálculo de sus grupos de homología  $H_q(F_i K)$  pues, como se ha mencionado en este trabajo, esto refleja propiedades del espacio  $F_i K$ . Sin embargo, el análisis puede llevarse un paso más adelante al analizar las homologías  $\{H_q(F_i K)\}_{i \geq 1}$  de toda la filtración, lo que da lugar a comportamientos particulares pues la clase de homología de un ciclo puede estar presente en cierto grupo de homología, pero no en otro; la presencia (**nacimiento**) y la desaparición (**muerte**) de una clase es el fenómeno primordial de la **homología persistente**.



En la parte izquierda de la imagen de arriba se muestra un ejemplo de una filtración y del lado derecho se encuentra un “resumen” del comportamiento de las clases de homología de dicha filtración. La representación del nacimiento y muerte de clases de homología es llamado el diagrama de persistencia de la filtración y es uno de los objetos de mayor interés dentro del área del análisis topológico de datos. Al lector

interesado en ahondar en estos temas le sugerimos consultar la tesis (Robles Torres, 2024).

## Conclusiones

La homología simplicial es definida para espacios con cierta estructura combinatoria particular (los complejos simpliciales), por esta razón resulta muy natural aplicar técnicas y herramientas computacionales para su cálculo. De hecho, este aspecto es el que ha despertado el interés por usar herramientas homológicas en aplicaciones de las matemáticas a otras ciencias; (véase Ghirst, 2014).

Como se mencionó anteriormente, la homología simplicial es sólo una teoría de homología por lo que es posible generalizar su definición en distintas direcciones. Por ejemplo, es posible definir grupos de homología en los que los coeficientes de las cadenas pertenezcan a otros anillos distintos de los enteros, también es posible aplicar homología a espacios que no sean complejos simpliciales, y más aún, es posible desarrollar una teoría de homología que no dependa de ningún espacio en particular y que generalice sus propiedades; de esto se encarga el álgebra homológica.

## Referencias

- Fraleigh, J. &. (2003). A First Course in Abstract Algebra. Addison-Wesley.
- Ghirst, R. (2014). Elementary Applied Topology, ed. 1.0. Createspace.
- Giblin, P. (2010). Graphs, surfaces and homology. Cambridge University Press.
- Prasolov, V. V. (2007). Elements of Homology Theory, Graduate Studies in Mathematics (vol. 81). AMS.
- Robles Torres, O. G. (2024). Homología persistente, una introducción al análisis topológico de datos [Tesis de licenciatura]. Universidad Autónoma de Zacatecas.
- Weibel, C. A. (1999). History of homological algebra.

## Sobre los autores

Miguel A. Maldonado Aguilar  
Contacto: mmaldonado@uaz.edu.mx  
Unidad Académica de Matemáticas.  
Universidad Autónoma de Zacatecas.  
Zacatecas, México.

Oscar Robles  
Contacto: germanroot\_tower@outlook.es  
Unidad Académica de Matemáticas.  
Universidad Autónoma de Zacatecas.  
Zacatecas, México.

**CAPÍTULO 3:  
DIVULGACIÓN:  
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

# **El diseño de memes matemáticos como movilizador de conocimientos del profesor de matemáticas**

*Leticia Sosa Guerrero*

## **Resumen**

En este documento pretendemos dar cuenta sobre cómo el diseño de memes matemáticos puede ser el denotante para movilizar aspectos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Consideramos como estudio de caso a un profesor de matemáticas de secundaria que participa en un curso de formación de profesores. En los resultados se muestran afirmaciones del profesor referentes a la (re) construcción de su conocimiento especializado (matemático y didáctico-matemático) como profesor de matemáticas a partir del diseño del meme matemático. El profesor de matemáticas ha de estar preparado de conocimientos robustos para atender las demandas actuales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

*Palabras clave:* memes matemáticos, conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido, construcción de conocimientos, aprendizaje del profesor, formación de profesores.

## Introducción

Los memes se han convertido cada vez más en elementos primordiales en la vida cotidiana de las redes sociales, se han ido incrustando en la nueva cultura digital independientemente del estatus social, económico o educativo, con ellos se puede reflejar a la sociedad una postura o un sentir ante los problemas cotidianos (Guadarrama et al., 2018).

En el sentido de Acuña (2017), los memes son unidades del pensamiento humano cargados de creatividad que muestran estructuras de reflexión. Éstos se pueden emplear para uso pedagógico pues “[...] el potencial de las redes sociales, la cotidianidad de su uso y la facilidad en su difusión; son elementos necesarios con los que podemos estimular procesos cognitivos indispensables en el aprendizaje” (Guadarrama et al., 2018, p.4). Más aún, Acuña (2017) señala que los memes pueden ser una gran oportunidad en clases si logramos incluirlos en la planificación instruccional, debido a que son una herramienta que puede servir para la memorización, incentivar la creatividad, reforzar el uso de la síntesis y estimular la inventiva para construir y transmitir conocimiento.

De acuerdo con Bini (et al., 2022), los memes matemáticos son enunciados matemáticos, donde la relación entre las matemáticas y los memes empodera ambos ámbitos, pues mejora el uso de los memes, más allá de su subcultura original, al enriquecerlos con un poder epistémico que nutre las discusiones matemáticas, y amplía la gama de signos matemáticos (tradicionalmente pertenecientes al dominio de la escuela).

En la Figura 1 se muestra un ejemplo de meme matemático, a través de una composición de cuatro paneles de capturas de pantalla de una comedia de televisión, con los subtítulos “Creo que olvidé algo” (I think I forgot something), “Si lo olvidaste, entonces no era importante” (If you forgot, then it wasn’t important), “Sí, tienes razón” (Yeah, you’re right). Se utiliza para representar metafóricamente la idea de olvidar algo de vital importancia, que se identifica por los textos agregados, los signos matemáticos que abordan el error del estudiante de expandir el binomio al cuadrado olvidando el término medio  $2xy$ , personificado por el niño dejado en práctica de fútbol en el panel inferior derecho.

*Figura 1. I think I forgot something**Meme matemático. Fuente: Reddit.*

Existen comunidades en internet que se dedican a los memes matemáticos (crean, mutan, comparten y comentan los memes), constituyendo el subconjunto matemático de la esfera de los memes (Stryker, 2011), también conocida como memesfera, en la transición del entorno matemático a esta esfera, las reglas matemáticas se conservan.

Investigaciones recientes prevén que los memes matemáticos podrían explotarse fructíferamente para diseñar experiencias educativas donde la cultura digital se encuentra con la cultura escolar, pudiendo conectar la educación matemática con otras prácticas (Bakker et al., 2021). Tanto en el marco de trabajo de las matemáticas de PISA 2021 como en las recomendaciones del proyecto de la OCDE 2030, incorporan la creatividad como una de las capacidades básicas que se deben potenciar en todos los estudiantes.

Se puede hacer notar la importancia de la idea de Vigotsky acorde con Moran y John-Steiner (2003) en torno a la creatividad como creadora de zona de desarrollo próximo para toda la vida; y a la de Piaget, según Duckworth (1964), respecto al aspecto primordial de la educación, crear personas capaces de atreverse a hacer cosas nuevas que no sólo repitan lo realizado por otros. Esto lleva a diseñar actividades educativas repensando la creatividad en la educación matemática, que amplíen el abanico de estudiantes que pueden experimentar la creatividad en matemáticas (Bini et al., 2022).

Se pretende hacer notar la importancia de que los docentes creen e implementen los memes matemáticos en el aula de matemáticas, donde se fomente la creatividad en todos los estudiantes (OCDE, 2030 y PISA, 2021), y poniendo de relieve el pretexto del meme matemático para que el propio profesor o futuro profesor de matemáticas movilice sus propios conocimientos.

Existen profesores de matemáticas que realizan nuevas prácticas educativas utilizando elementos de las propias redes sociales con el objetivo de generar mejores procesos de enseñanza-aprendizaje, por ejemplo, elaboran y difunden memes matemáticos para introducir, explicar o reforzar contenidos matemáticos, lo cual les ha resultado exitoso e impactante en el aprendizaje de los alumnos (Guadarrama et al., 2018). Más aún, de acuerdo con Guadarrama et al, 2018 .:

Una de las cualidades que debe desarrollar el docente actual es saber incorporar elementos tecnológicos a su práctica educativa, elementos que, por supuesto, le permitan generar mejores aprendizajes y desarrollar habilidades en los alumnos. [...] El meme ha ganado popularidad en las redes sociales, en los últimos años, sirve como sátira política, social o simplemente alude algo gracioso; en la mayoría de las veces el meme no necesita de explicación profunda, por sí mismo se explica, quizá? a ello se deba su popularidad. Por lo descrito, consideramos que, los jóvenes al estar en contacto diario con sus redes, por antonomasia, con memes; en este caso, los de carácter académico pueden aprender, reforzar, o practicar conocimientos, sin necesidad de estar dentro de las aulas. (p.2).

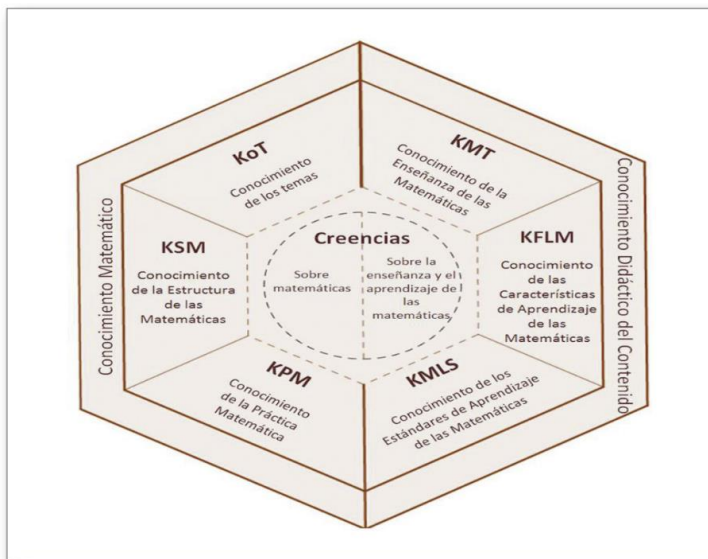
Asimismo, coincidimos con Acuña (2017) en que puede haber cierto escepticismo de los profesores de matemáticas ante los memes, porque los estudiantes si bien es cierto que usan los memes no lo hacen a nivel educativo. Por ello, para incorporarlos en el aula será necesario tener reglas claras con el fin de no perder el sentido educativo. De acuerdo con lo anterior, vale la pena invitar a profesores y futuros profesores de matemáticas a generar memes matemáticos con propósitos meramente didácticos, pues experimentarán en su elaboración, además de la movilización/aprendizaje de conocimientos, un proceso de estimulación a su mente, pondrán en práctica sus habilidades en el uso de herramientas digitales para su desarrollo (Guadarrama et al., 2018).

Así pues, la investigación que aquí se presenta tiene como objetivo arrojar luz sobre cómo el diseño de memes matemáticos por parte del profesor de matemáticas puede movilizar su conocimiento especializado (conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido), contribuyendo a su formación, en particular en su conocimiento profesional tanto a movilizarlo/aprenderlo como a tener una idea de cómo ponerlo en acción en el aula, de tal manera que prospectivamente, él pueda aprovecharlo a través de los memes matemáticos en la enseñanza.

## **Referente teórico**

El modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK por sus siglas en inglés, consta de tres dominios: Conocimiento Matemático, Conocimiento Didáctico del Contenido y Creencias (Carrillo et al., 2018). En este documento nos centraremos en los dos primeros. Tanto el Conocimiento Matemático como el Conocimiento Didáctico del Contenido cuentan con tres subdominios como se muestra en la Figura 2.

**Figura 2. El modelo MTSK**



*Fuente: Sosa et al., 2015, p. 175.*

En la Tabla 1 se explican de manera sucinta cada uno de los subdominios.

*Tabla 1.*  
Conocimiento Matemático

Conocimiento de los Temas	Conocimiento de conceptos, definiciones, aspectos fenomenológicos, procedimientos, propiedades y registros de representación que caractericen aspectos del tema matemático abordado.
Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas	Conocimiento de cómo se dan las conexiones entre temas, de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado y de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental.
Conocimiento de la Práctica Matemática	Conocimiento sobre cómo crear, producir o hacer matemáticas.

#### Conocimiento Didáctico del Contenido

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas, de recursos materiales y virtuales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos y ayudas matemáticas adecuados para cada contenido.
Conocimiento las Características de Aprendizaje de las Matemáticas	Conocimiento que tiene el profesor acerca de teorías de aprendizaje de las matemáticas, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje y formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático.
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas	Conocimiento acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado, sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos.

## Metodología

En esta investigación tomamos como estudio de caso (Stake, 1994) a un profesor de matemáticas de secundaria, que por ética llamaremos con el pseudónimo “Javi”. Él participa en un curso de formación de profesores de matemáticas donde ya se le había mostrado el modelo MTSK, se le explicó lo que es un meme matemático y se le dieron varios ejemplos. Luego, se le pidió que diseñara un meme donde primero tenía que tomar en cuenta y explicar la descripción de la idea representada, la afirmación matemática y la matemática de fondo. Después mostraba su meme terminado.

Una vez terminado su meme y con el objetivo de que los participantes reflexionaran principalmente sobre los conocimientos puestos en acción para realizarlo, se les aplicó un cuestionario:

- » ¿Qué conocimientos se requerirían para hacer un meme?
- » Explica lo más ampliamente posible entonces, ¿cuál es la relación del meme con el MTSK, con cada subdominio?
- » ¿Por qué es importante el MTSK para validar un meme en matemáticas?

## Análisis y Resultados

Primero se muestra lo expresado por Javi respecto a los elementos básicos para el diseño del meme matemático, antes de mostrar el meme terminado. Luego, lo referente a los conocimientos de acuerdo a las respuestas dadas en las preguntas hechas.

A continuación, se muestra lo mencionado por Javi en torno a la descripción de la idea representada en el meme matemático, la afirmación matemática y la matemática de fondo.

**Tabla 2.** Javi respecto a los elementos básicos para el diseño del meme matemático

Descripción de la idea representada	<p><i>La idea es presentar dos escenas utilizando el meme del gato y la mujer, donde en la primera escena se evidencie un error sobre las propiedades de la potencia, culpando al gato por la mala explicación. En la escena dos, el gato se defiende indicando que solo se puede aplicar en la multiplicación.</i></p> <p><i>Se utiliza el meme de la mujer y el gato porque es una escena que puede representar a una mujer en estado de alteración por una mala calificación obtenida y que culpa a su maestro, un gato, por haberle dado malas instrucciones. Se toma esta plantilla ya que ha sido tendencia en las redes sociales y la comunidad con facilidad entiende lo que quiere transmitir cada escena.</i></p>
Afirmación matemática	<p><i>Poner de relieve el error común de los estudiantes:</i></p> $x^2 + x^4 = x^6$
Matemática de fondo	<p><i>La afirmación hace referencia a las propiedades de potenciación, dado que, en ocasiones se confunde su aplicabilidad en la suma, como es el caso de la afirmación presentada, donde suman los exponentes, pero no se deben sumar. Lo que refleja una dificultad en la comprensión adecuada de lo que es la potenciación y la aplicación de sus propiedades, dificultad que trasciende en el trabajo algebraico.</i></p>

## Descripción de la idea representada

La idea es presentar dos escenas utilizando el meme del gato y la mujer, donde en la primera escena se evidencie un error sobre las propiedades de la potencia, culpando al gato por la mala explicación. En la escena dos, el gato se defiende indicando que sólo se puede aplicar en la multiplicación.

Se utiliza el meme de la mujer y el gato porque es una escena que puede representar a una mujer en estado de alteración por una mala calificación obtenida y que culpa a su maestro, un gato, por haberle dado mal las instrucciones. Se toma esta plantilla ya que ha sido tendencia en las redes sociales y la comunidad con facilidad entiende lo que quiere transmitir cada escena.

Afirmación matemática  
estudiantes:

Poner de relieve el error común de los

$$x^2 + x^4 = x^6$$

Matemática de fondo. La afirmación hace referencia a las propiedades de potenciación, dado que, en ocasiones se confunde su aplicabilidad en la suma, como es el caso de la afirmación presentada, donde suman los exponentes, pero no se deben sumar. Lo que refleja una dificultad en la comprensión adecuada de lo que es la potenciación y la aplicación de sus propiedades, dificultad que trasciende en el trabajo algebraico.

El meme terminado propuesto por Javi es:

*Figura 3. Meme terminado de Javi*



Javi menciona en el cuestionario que para hacer el meme matemático primero ocupó definir el objeto matemático sobre el cual iba a trabajar y lo que quería presentar, eso le llevó a pensar en los errores o dificultades que suelen presentar los estudiantes y que ha visto desde su expe-

riencia. Lo siguiente fue pensar y buscar qué tipo de imagen le podría servir y cómo integrarla con el objetivo que él deseaba transmitir. Por último, tuvo que buscar un editor de fotos sobre el cual pudiera trabajar e integrar texto, imagen y fórmulas, entonces fue desde Word, Google y editor de fotos.

b) Respecto a lo expresado por Javi en las preguntas del cuestionario que son más específicas en torno a los conocimientos.

*¿Qué conocimientos se requerirían para hacer un meme?*

Conocimientos matemáticos, en este caso sobre dificultades, astucia y creatividad para que realmente sea un meme, es decir cause gracia, llame la atención y transmita el mensaje esperado. Conocer o tener presente las imágenes utilizadas en memes y saber que son tendencia para que así sean cercanas a las personas. También se requieren conocimientos sobre cómo descargar una imagen, cómo ingresar texto y cómo organizarlo. (Javi, cuestionario).

Explica lo más ampliamente posible entonces, ¿cuál es la relación del meme con el MTSK, con cada subdominio?

Con el conocimiento matemático considero que se relaciona fuertemente, ya que, para darle un sentido u objetivo al meme, éste se debe contemplar dentro de lo que es la matemática y lo que se va a mostrar, por tanto, para cumplir con ese objetivo se debe tener conocimiento matemático, lo que es la matemática, lo que ayuda a identificar y conocer la estructura y fenomenología de cada contenido y así poder transmitirlo por medio del meme. (Javi, cuestionario).

**Tabla 3.** *Javi en cuanto a los subdominios del conocimiento matemático*

Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT)	<i>El conocer los temas matemáticos ayuda a identificar las propiedades y las representaciones sobre las cuales se puede dar un contenido, es así como el meme es una representación y la forma como expreso el lenguaje matemático en ella y las propiedades que resalto son aspectos que se incluyen en el meme.</i>
Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)	<i>La relación con el meme esta en las conexiones matemáticas que se establecen y que permiten ver el error e identificar con qué contenido matemático está conectado y lo que a su vez no le permite avanzar hacia otro aprendizaje.</i>
Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)	<i>La relación es que la práctica de hacer matemáticas involucra un conocimiento de lo que son las matemáticas, un factor importante en un primer momento para presentar un aspecto de la matemática y plasmarlo en un meme, seguido que su contenido debe posibilitar e incitar al reconocimiento de lo que son las matemáticas, fundamentos y propiedades, de modo que por el meme se puede estar reconociendo su importancia y está se puede trasladar al trabajo propio de matemática. Más aún, se relaciona ya que el hacer matemáticas involucra conocer y aplicar sus fundamentos y propiedades, así el evidenciar un error por medio de un meme, muestra lo esencial de su dominio en la construcción de las matemáticas.</i>

Hasta ahí lo referente al conocimiento matemático, ahora en la Tabla 4, se muestra lo referente a los tres subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido.

Tabla 4. Javi en cuanto a los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido

Conocimiento de las Características del aprendizaje (KFLM)	<i>Se relaciona con las formas de aprendizaje, al saber que por medio de un meme se puede presentar un aprendizaje, de igual forma el mostrar una dificultad está reconociendo los errores que se pueden presentar en los estudiantes.</i>
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemática (KMT)	<i>Se relaciona por considerar estrategias que favorezcan la enseñanza (y evitar futuros errores). Por otro lado, como un recurso que se puede utilizar dentro del aula, para presentar a los estudiantes errores comunes y a su vez con ello aclarar o profundizar en la enseñanza y afianzamiento de un contenido.</i>
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	<i>Permite que se focalice al grupo en el cual se puede presentar y que va a tener sentido el meme con respecto al mensaje que se desea transmitir y el aprendizaje relacionado con el contenido matemático que se desea enseñar.</i>

### ***Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)***

Permite que se focalice al grupo en el cual se puede presentar el meme y que va a tener sentido con respecto al mensaje que se desea transmitir y el aprendizaje relacionado con el contenido matemático que se desea enseñar.

En este ejercicio podríamos discutir hasta qué punto lo que describe Javi en KoT es KoT y así para cada subdominio, sin embargo lo que se desea resaltar es el proceso de movilización de los conocimientos que se dan en los profesores de matemáticas, en la riqueza que existe en esa reflexión (Sowder, 2007); la importancia que se da a partir de la movilización de los conocimientos como detonador de la (re)construcción de éstos a fin de potencializar poco a poco y con un acompañamiento, su conocimiento especializado como profesor de matemáticas, es decir, su propio MTSK.

Por último, en la tercera pregunta, cabe resaltar lo expresado por Javi acerca de la importancia de considerar los conocimientos propues-

tos en el modelo MTSK, para validar el meme matemático realizado.

*¿Por qué es importante el MTSK para validar un meme en matemáticas?*

Porque por medio del MTSK se puede analizar con detalle cada uno de los aspectos que se deben considerar en la enseñanza de un contenido matemático, esto gracias a cada uno de los subdominios que permiten identificar y precisar los conocimientos que se ponen en juego en la planeación de la enseñanza, lo cual se puede analizar en la forma como se presenta un contenido, por ello se puede tomar como herramienta para contrastar lo que presenta el meme y si éste contempla todos aquellos elementos. (Javi, cuestionario)

Por último, decir que el ejercicio de diseñar un meme me pareció un trabajo diferente e interesante, analizar todo lo que hay detrás de la construcción de un meme y su complejidad desde el solo hecho de pensar cómo presentar un aspecto de la matemática es algo que nunca había imaginado. En mi caso fue exigente, ya que me llevó a considerar eso que quieres transmitir pero que a su vez no resulta fácil, también ver de fondo la carga que trae en cuanto a conocimiento, ya que ver su relación con los subdominios del MTSK te lleva a analizar y pensar qué más hay allí de lo que a simple vista se puede observar y también queda abierto de qué forma poder integrar más de información en el meme. (Javi, cuestionario)

## **Conclusiones**

El meme matemático podría ayudar en el desarrollo de distintos aspectos: negociar significados matemáticos, dominio del tema, creatividad, capacidad de análisis, síntesis, ingenio, capacidad de expresión, competencias lingüísticas y digitales, etc. Un meme matemático puede atender necesidades epistémicas para iniciar un proceso de argumentación matemática, pero puede requerir tutoría formal o informal hasta que complete la creación de significado, incluso luego ser reforzada.

Para permitir que los profesores de matemáticas aprovechen el potencial educativo de los memes debemos brindarles orientación sobre cómo se pueden entender los memes matemáticos y por lo tanto proporcionando heurísticas (Bini et al., 2022). Para que el profesor de matemáticas diseñe un meme es muy importante que tenga bien clara (y se haga explícita en algún momento) la descripción de la idea representada, pero sin falta, la afirmación matemática y la matemática de fondo.

El profesor de matemáticas debe estar preparado con conocimiento especializado que le permita entender el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con una comprensión robusta de las matemáticas para la enseñanza, pues: “los docentes de hoy requieren disposición de hacer, de proponer, de ejecutar nuevas estrategias, de innovar dentro y fuera del aula; con el firme propósito de generar mejores generaciones de alumnos.” (Guadarrama et al., 2018, p.16), para lo cual el diseño de memes matemáticos con rigor (Bini et al., 2022), pueden ser una opción, pero tomando como referente un modelo de conocimientos, por ejemplo, el MTSK, para dar sustento y rigor tanto al conocimiento matemático como al conocimiento didáctico de ese contenido matemático.

## Referencias

- Acuña M. (2017). Innovación educativa: Enseñar con memes. Disponible en <https://www.evirtualplus.com/innovacion-educativa-ensenar-con-memes/>
- Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w>
- Bini, G., Bikner-Ahsbabs, A. & Robutti, O. (2022). “How to meme it”: reverse engineering the creative process of mathematical Internet memes. *Educational Studies in Mathematics*. pp.1-34 <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10173-1>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Duckworth, E. (1964). Piaget rediscovered. *The Arithmetic Teacher*, 11(7), pp. 496–499. <http://www.jstor.org/stable/41186862>.
- Guadarrama, A., Mendoza, C., Díaz, J. y Becerril, F. (2018). El uso de los memes como estrategia didáctica aplicada en las matemáticas. Tomado de internet el 6 de diciembre de 2022. [97N75Ad7WfPEABQ-FhrDNPdFOWuAwSE5dDVJGODTH.pdf](https://www.virtualeduca.com/97N75Ad7WfPEABQ-FhrDNPdFOWuAwSE5dDVJGODTH.pdf) (virtualeduca.red)
- Moran, S., & John-Steiner, V. (2003). Creativity in the making: Vygotsky’s contemporary contribution to the dialectic of creativity & development. In R. K. Sawyer, V. John-Steiner, S. Moran, R. J. Sternberg, D. H. Feldman, J. Nakamura, & M. Csikszentmihalyi (Eds.), *Creativity and development*, pp. 61–90). <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195149005.003.0003>
- OCDE (2030). *Future of Education and Skills 2030*. [https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20\(05.04.2018\).pdf](https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf)

- PISA (2021). Mathematics Framework. <https://pisa2021-maths.oecd.org/>
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., Carrillo Yáñez, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*. 33(2), pp. 173-189.
- Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Stake, R. E. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (eds.). *Handbook of Qualitative Research*. Thousands Oaks, CA: Sage Publications, pp. 236-247.
- Stryker, C. (2011). *Epic win for anonymous: How 4chan's army conquered the Web*. The Overlook Press.

## **Sobre la autora**

Leticia Sosa Guerrero

Contacto: [lsosa@uaz.edu.mx](mailto:lsosa@uaz.edu.mx)

Tiene amplia experiencia en el ámbito de formación de profesores, con énfasis en el conocimiento profesional del profesor.

En octubre de 2011 recibe el premio de la Sociedad Matemática Mexicana y la Fundación Sofía Kovalevskaja 2011 para promover la investigación por parte de las mujeres en cualquier ámbito de la Matemática.

En 2019 es reconocida por el SIZART como una de las 10 científicas destacadas de Zacatecas (México).



## **Construcción cognitiva de conceptos del álgebra lineal en el nivel superior**

*Ofelia Montelongo Aguilar  
Lorena Jiménez Sandoval  
Darly Alina Kú Euán*

### **Resumen**

El presente documento reporta los resultados de tres investigaciones desarrolladas bajo el marco teórico-metodológico de la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema), con el objetivo general de analizar cómo los estudiantes construyen los conceptos del Álgebra Lineal. Se consideró como metodología el ciclo de investigación de la teoría APOE que consta de tres fases: el análisis teórico, el diseño e implementación de la enseñanza y el análisis y verificación de los datos. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes sólo desarrolla la estructura mental de proceso o están camino a ella, y muy pocos logran construir la estructura mental de objeto.

Palabras clave: álgebra lineal, construcción cognitiva, nivel superior, teoría APOE.

## Introducción

Las investigaciones aquí reportadas contribuyen en parte a la solución de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal en el nivel superior. Diversas investigaciones (Dorier, Robert, Robinet y Rogalsiu (2000), Pavlopouluv (1993), Sierpinska (1996), Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999), Hillel (2000), Dorier y Sierpinska (2001), entre otras) han reportado que los conceptos del Álgebra Lineal resultan difíciles de comprender para los estudiantes. Dorier y Sierpinska (2001) consideran que no importa cómo se enseñe el Álgebra Lineal, éste sigue siendo un tema difícil debido a la complejidad cognitiva y conceptual que caracteriza a esta disciplina, y que al parecer seguirá presentando dificultades para la mayoría de los estudiantes. Por su parte Hillel (2000) respalda la postura de estos investigadores al considerar que la enseñanza del Álgebra Lineal a nivel universitario es considerada una experiencia frustrante para los profesores y estudiantes por igual. Los docentes que enseñan este curso se han resignado al hecho de que esto es simplemente como dice Hillel (2000) “la naturaleza de la bestia” y que no se puede hacer mucho para cambiar las cosas (p. 191).

Sin embargo, en la década de los 80 surge una teoría que ha mostrado ser eficaz tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del conocimiento matemático avanzado, llamada teoría APOE. Ésta se ha utilizado en investigaciones donde se quiere explicar la construcción de conceptos o tópicos matemáticos avanzados.

En particular en México Oktaç y Trigueros (2010) muestran cómo esta teoría ha permitido explicar con éxito la construcción de los conceptos del Álgebra Lineal. Para abonar en este mismo sentido, en la Unidad Académica de Matemáticas, al interior del cuerpo académico “La matemática, su enseñanza y aprendizaje” se han llevado a cabo una serie de investigaciones con la intención de explicar cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos del Álgebra Lineal, en particular los conceptos en los que se ha puesto mayor interés son: extensión lineal, base de un espacio vectorial y homomorfismo entre grupos. En este documento se reportan los resultados más sobresalientes de las tres

investigaciones [Cabral (2018), Martínez (2019) y Barrón (2021)] relacionadas con los conceptos anteriormente mencionados.

## **La teoría APOE en la enseñanza y aprendizaje de conceptos de nivel superior**

La teoría APOE es una teoría desarrollada para la investigación y el desarrollo curricular en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, principalmente de nivel superior. Tiene sus inicios en la enseñanza del cálculo y se ha extendido a otras áreas de la matemática como el Álgebra Lineal. Esta teoría permite describir cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos mediante modelos cognitivos que se utilizan para diseñar la instrucción y/o para evaluar el éxito o fracaso de los estudiantes al resolver situaciones problemáticas matemáticas (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014).

De acuerdo a la teoría APOE, los estudiantes intentan resolver situaciones matemáticas mediante la construcción y aplicación de estructuras mentales (llamadas acciones, procesos, objetos y esquemas) con la intención de comprender los conceptos matemáticos. Esto, cognitivamente implica la transformación (acciones o procesos) de estructuras previas, las cuales se convierten en nuevos objetos. La premisa en APOE es que un estudiante puede aprender cualquier concepto matemático si ha construido las estructuras mentales previas involucradas en dicho concepto (Dubinsky, 1991).

Cada estructura mental se desarrolla a través de un mecanismo mental: Un proceso es la interiorización de una acción, la coordinación de dos procesos previamente construidos o la reversión de otro proceso. Un objeto puede construirse mediante la encapsulación de un proceso o la tematización de un esquema. Así mismo el objeto puede ser desencapsulado para regresar al proceso que lo generó, o destematizarlo para actuar, si es necesario, sobre cada una de las partes del esquema que lo generó.

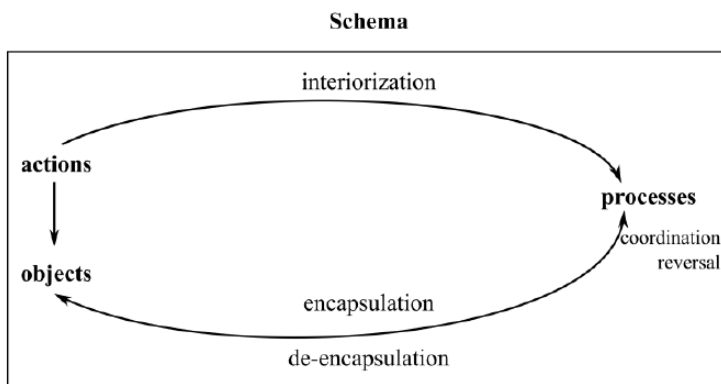
Las estructuras y los mecanismos mentales que considera la teoría APOE forman una espiral donde las nuevas estructuras se construyen

actuando sobre las estructuras existente en niveles inferiores de pensamiento. Al respecto Dubinsky (1997) escribió:

Los objetos, una vez construidos, se pueden transformar en un plano superior de pensamiento en acciones y procesos que dan origen a objetos más complejos (cognitivamente hablando) y así sucesivamente e indefinidamente. Además, cualquier acción, proceso u objeto puede ser reconstruido como resultado de experimentar nuevas situaciones problemáticas en un plano superior, interiorizar acciones más sofisticadas o encapsular procesos más ricos. La construcción de nivel superior no se pierde, permanece como parte de la construcción enriquecida (citado en Arnon et al., 2014, p. 26).

La siguiente imagen muestra el corte transversal de la espiral que representa la construcción de conocimiento matemático de acuerdo a la teoría APOE.

**Figura 1.** Estructuras y mecanismos mentales en la teoría APOE

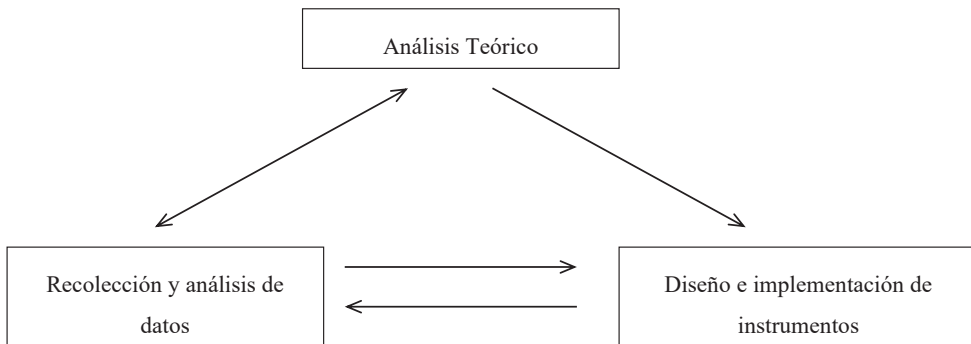


*Fuente: Arnon et al., 2014, p. 18.*

## Metodología

La teoría APOE cuenta con un ciclo de investigación, el cual consta de tres fases: análisis teórico del concepto en estudio, diseño e implementación de la enseñanza y análisis y verificación de los datos (Arnon et al., 2014). Las investigaciones de Cabral (2018) y Barrón (2021), reportadas en este documento, consideran como metodología una modificación del ciclo de investigación de la teoría APOE en su segunda fase, donde se diseña e implementa un cuestionario y una entrevista semiestructurada (Figura 2) para validar y/o refinar la descomposición genética preliminar, según sea el caso, en lugar del diseño e implementación de la instrucción. En cambio, el trabajo de Martínez (2019) se centró en la segunda fase del ciclo de investigación de la teoría APOE, se consideró una descomposición desarrollada por las investigadoras Kú, Oktaç y Trigueros (2008) y a partir de ella se diseñó, aplicó y analizó un diseño de enseñanza.

*Figura 2. Ciclo de investigación modificado*



*Fuente: Arnon et al., 2014, p. 94.*

A continuación, describimos con mayor detalle las tres fases desarrolladas en las tres investigaciones que se reportan en este documento. En las investigaciones de Cabral (2018) y Barrón (2021) se diseñó un análisis teórico (fase 1 del ciclo de investigación de la teoría APOE), donde se consideraron los siguientes elementos: análisis de los textos sugeridos en los planes y programas de estudio de una licenciatura en matemáticas; artículos que reportaron diversas dificultades asociadas con el concepto de homomorfismo entre grupos o extensión lineal o con los conocimientos previos que se requerían para la construcción de dichos conceptos, y la experiencia de los investigadores como aprendices/enseñantes.

El resultado del análisis teórico fue una descomposición genética preliminar donde se describían las estructuras y mecanismos mentales involucrados en la construcción de los conceptos de homomorfismo entre grupos y extensión lineal. En la segunda fase del ciclo de investigación se diseñaron e implementaron tanto un cuestionario diagnóstico como una entrevista semiestructurada con el objetivo de indagar sobre las construcciones mentales que mostraban los estudiantes.

Finalmente, la tercera etapa consistió en el análisis de los datos para confrontar las estructuras mentales que evidenciaban los estudiantes y las propuestas con la descomposición genética preliminar para refinar o validar a esta última. En la investigación desarrollada por Martínez (2019) se adecuó la descomposición genética desarrollada por las investigadoras Kú, Oktaç y Trigueros (2008) y a partir de ella se diseñó, aplicó y analizó un boceto de enseñanza para el concepto de base de un espacio vectorial. En esta última investigación se diseñaron actividades basadas en dicha descomposición genética y se consideró el ciclo ACE (Actividades, discusiones en Clase y Ejercicios) para la implementación de la instrucción.

## **Resultados**

A continuación, presentamos los resultados particulares que se obtuvieron en cada una de tres investigaciones aquí reportadas.

## *Construcción Cognitiva del concepto de extensión lineal*

El tópico de extensión lineal forma parte del conocimiento formal y abstracto que caracteriza al Álgebra Lineal (Dorier y Sierpinska, 2001), ya que involucra conocimientos previos que el estudiante debe dominar, como: espacio vectorial, base ordenada y transformación lineal.

De acuerdo a Uicab y Oktac (2006) el problema de extensión lineal consiste en determinar una transformación lineal por medio de las imágenes de los vectores de una base. Las autoras reportan la ausencia de un pensamiento sistémico en los estudiantes al resolver el problema de extensión lineal geoméricamente, es decir, lo abordan desde el aspecto puramente algorítmico sin establecer conexiones entre los diferentes conceptos involucrados, este proceder de los estudiantes las lleva a plantearse la pregunta ¿cómo ayudar a los estudiantes a pensar teóricamente y a hacer conexiones entre los diferentes conceptos? Comentan que la respuesta no es tan sencilla y la dejan abierta.

Para aportar a una respuesta se realizó una investigación que abordó el aspecto cognitivo de este tópico de extensión lineal (Cabral, 2018). Se diseñó una descomposición genética preliminar (DGP), donde se describieron las conexiones o relaciones entre los diferentes conceptos involucrados, en términos de estructuras y mecanismos mentales. Los elementos considerados para el diseño fueron: el análisis de tres textos sugeridos en los planes y programas de un curso de Álgebra Lineal, (Friedberg, Insel y Spence, 2003; Hoffman y Kunze, 1973; y Fraleigh y Beauregard, 1989); investigaciones que reportaron diversas dificultades asociadas con las transformaciones lineales, bases, combinaciones lineales y extensión lineal (Uicab y Oktaç, 2004; Roa-Fuentes, 2008; Kú, Oktaç y Trigueros, 2008) y la experiencia de los investigadores como enseñantes y/o aprendices de dicho tópico. La parte fundamental de dicha descomposición consistió en la coordinación de dos procesos, el de transformación lineal y el de base de un espacio vectorial.

Cabral (2018) implementó dos instrumentos para la recogida de datos, un cuestionario diagnóstico y una entrevista semiestructurada. El cuestionario tuvo como objetivo indagar sobre las construcciones pre-

vías propuestas en la DGP que evidenciaran los estudiantes, y poder así seleccionar a los alumnos que serían entrevistados. La entrevista semiestructurada le permitió determinar si los estudiantes mostraban o no las estructuras y mecanismos mentales necesarios para la construcción del tópico de extensión lineal de acuerdo a la DGP, con la finalidad de validar o refinar dicha DGP. Los estudiantes fueron universitarios que habían llevado al menos un curso de Álgebra Lineal en una licenciatura en Matemáticas en el estado de Zacatecas.

El análisis de los datos del cuestionario diagnóstico mostró en general que la mayoría de los estudiantes no cuentan con las estructuras previas que se requieren para la construcción exitosa del tópico de extensión lineal. En particular la estructura previa de proceso base fue la menos evidenciada, ya que sólo un estudiante de los ocho, a los que se les aplicó el cuestionario, la mostró, la mayoría se encontraban en camino a la interiorización. En cuanto a la entrevista semiestructurada se puede concluir que los cuatro estudiantes entrevistados construyen el tópico de extensión lineal como se propuso en la DGP, siempre y cuando se considere que la transformación lineal (TL) involucrada exista y sea única. Esto no cambia la manera en cómo se construye el proceso de extensión lineal a través del mecanismo de coordinación, sin embargo, se requiere el proceso de existencia y unicidad de una TL para que el estudiante sea consciente de la importancia que juega el proceso base en dicha coordinación.

### *Construcción Cognitiva del concepto de base de un espacio vectorial*

El concepto de base fue abordado desde la teoría APOE por Kú, Oktaç y Trigueros (2008). Ellas consideran que es un concepto difícil de comprender por parte de los estudiantes una vez que se deja de lado la parte algorítmica relacionada con él y se considera desde el aspecto formal. También mencionan que es un concepto importante y central para la teoría de los espacios vectoriales y la construcción de otros conceptos más avanzados como el de transformación lineal, valores y vectores propios, entre otros.

Kú, Oktaç y Trigueros (2008) se centraron en el diseño de una descomposición genética preliminar del concepto de base. Se aplicó una entrevista semiestructurada para indagar sobre las estructuras mentales desarrolladas por los estudiantes durante un curso de Álgebra Lineal. En general el análisis de los datos arrojó que son pocos los estudiantes que logran alcanzar una concepción del proceso y que otros se quedan en un nivel intermedio entre acción y proceso.

Los resultados de este estudio llevaron a Martínez (2019) a realizar una investigación que tuvo como objetivo principal diseñar, aplicar y analizar una instrucción que ayudara a los estudiantes a desarrollar las estructuras y mecanismos mentales propuestos en la descomposición genética elaborada por Kú, Oktaç y Trigueros (2008). La pregunta de investigación propuesta por Martínez fue: ¿qué actividades permiten la construcción del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE? Para responder a esta pregunta se desarrolló la segunda componente del ciclo de investigación de la teoría APOE, que considera una componente pedagógica basada en el ciclo ACE.

El diseño de enseñanza constó de tres momentos relacionados con la construcción de las estructuras mentales: proceso de independencia lineal, proceso de espacio generado y conjunto generador, y la coordinación de estos dos procesos que dio lugar al proceso de base. Para cada uno de estos momentos se diseñaron actividades (trabajadas en grupos colaborativos), preguntas guía para la discusión en clases y ejercicios de tarea para reforzar lo aprendido en las actividades y las discusiones en clase.

Uno de los principales resultados obtenidos por Martínez (2019) en la implementación de la instrucción sobre una prueba piloto, fue que se obtuvo que la transición de una etapa de conocimiento a otra (acción, proceso, objeto, esquema) mediante los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, reversión, encapsulación, des-encapsulación y tematización) no es inmediata. Ésta debe estar guiada en todo momento por el profesor, por lo que se tiene que tener cuidado con las situaciones problemáticas que se propongan para el desarrollo de los mecanismos mentales.

También se evidenció la importancia que tiene el profesor en la segunda etapa del ciclo ACE, que es la discusión en clases, pues debe guiar a los estudiantes en la construcción de las estructuras mentales mediante la reflexión constante, de otra manera los estudiantes pueden quedarse sólo en la mecanización de los conceptos y no lograr la conceptualización.

### *Construcción cognitiva del concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos*

El esquema más robusto dentro de la matemática es el de función, ya que este concepto es transversal a todas las ramas de la matemática, en particular si el objeto-grupo (estructura matemática) es asimilado por el esquema de función. Un estudiante puede pensar en funciones definidas sobre grupos que son las que se trabajan en el área del álgebra, en particular aquellas funciones que cumplen la característica de preservar la operación definida en el grupo (estas funciones son llamadas homomorfismo entre grupos).

Suena sencillo el pensar que si los estudiantes han trabajado con funciones reales de una o más variables deberían de manera inmediata abordar las funciones entre grupos sin problema. Pero la realidad no es así, los estudiantes muestran diversas dificultades entre las que se encuentra el determinar la imagen de un homomorfismo. Es por ello que se llevó a cabo una investigación sobre el desarrollo cognitivo de la imagen de un homomorfismo entre grupos (Barrón, 2021).

Barrón (2021) diseñó una descomposición genética preliminar para describir las estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción de la imagen de un homomorfismo entre grupos. Mostrando que los estudiantes requieren de diversos conocimientos previos en etapas superiores de pensamiento como: proceso función, objeto homomorfismo entre grupos, esquema de grupo, subgrupo, operación binaria, conjunto, axioma, así como el objeto sistema de ecuaciones lineales. De no contar con ellos difícilmente podrán tener éxito en la obtención de la imagen de un homomorfismo entre grupo.

Los mecanismos mentales presentes en la construcción del concepto que evidenciaron los estudiantes fueron el de interiorización y encapsulación, dando origen a una descomposición genética del tipo:

$$A \rightarrow P \rightarrow O \text{ (acción-proceso-objeto)}$$

Los instrumentos para la recogida de datos fueron: un cuestionario diagnóstico y un cuestionario con audio. En cuanto al cuestionario diagnóstico, éste constó de cinco situaciones matemáticas que incluían un análisis preliminar donde se mencionaba la estructura previa a evidenciar. Se aplicó a nueve estudiantes de la licenciatura en matemáticas que habían cursado la materia [83] de Álgebra Lineal I y II en la Universidad Autónoma de Zacatecas. La intención del cuestionario fue seleccionar a aquellos estudiantes que contaran con las estructuras previas necesarias para la construcción del concepto de homomorfismo entre grupos. Se seleccionaron cuatro estudiantes a quienes se les aplicó otro cuestionario acompañado de un audio (con cinco situaciones problemáticas), ya que no se pudo realizar una entrevista semiestructurada debido a la pandemia COVID-19. La finalidad fue contrastar las estructuras mostradas por los estudiantes y las propuestas en la DGP y así poder validar o refinar dicha DGP.

Los principales resultados obtenidos por Barrón (2021) muestran que las estructuras previas de mayor dificultad para los estudiantes fueron: objeto sistema de ecuaciones y objeto homomorfismo, lo cual era de esperarse, pues es bien conocido en la teoría que el objeto es la estructura mental más difícil de alcanzar. En cuanto a las estructuras mentales de acción, proceso y objeto para la imagen de un homomorfismo entre grupos, los cuatro estudiantes evidenciaron la estructura de acción. Sin embargo, no todos mostraron haber desarrollado el mecanismo de interiorización (sólo uno de los cuatro) y la razón fue el no contar con la estructura previa de objeto-sistema de ecuaciones lineales, pieza clave para la construcción del proceso. De igual manera, sólo un estudiante mostró evidencia de contar con la estructura de objeto lo cual no es de extrañarse ya que diversas investigaciones desarrolladas bajo la teoría APOE han dado los mismos resultados.

## Conclusiones

A manera de conclusión podemos mencionar que las etapas de comprensión, de acuerdo con la teoría APOE, son acción, proceso, objeto y esquema. Y los mecanismos que las generan son: interiorización, coordinación, reversión, encapsulación, desencapsulación y tematización. En términos de estas estructuras y mecanismos podemos mencionar que las investigaciones muestran que la mayoría de los estudiantes sólo logran construir el concepto en estudio en la etapa proceso o se encuentran camino a construirla[PE84][85]. La etapa más difícil de construcción es la de objeto y casi ningún alumno logra alcanzarla.

Finalmente, esperamos que estas investigaciones aporten elementos para el diseño de actividades que promuevan la construcción del objeto para que el estudiante logre una mejor comprensión de los conceptos del Álgebra Lineal.

## Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Okta?, A., Roa, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.
- Barrón, S. (2021). Desarrollo cognitivo del estudiante sobre el concepto de imagen de un homomorfismo entre grupos. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.
- Cabral, J. (2018). Construcción cognitiva del tópico extensión lineal, desde la teoría APOE. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.
- Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Eds), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-126). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., Porter, A., Watkins, A. & Watkins, W. (Eds). Resources for Teaching Linear Algebra, MAA Notes (vol. 42, pp. 85-106). United States of America: Mathematical Association of America.
- Dorier, J.; Robert, A.; Robinet, J. & Rogalsiu, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En Dorier, J. (Eds.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 85-124). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J. & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En Holton, D. (Eds.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fraleigh, J., & Bearegard, R. (1989). Álgebra Lineal. Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Friedberg, S., Insel, A. & Spence, L. (2003). Linear Algebra. New Jersey: Prentice Hall.
- Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (2003). Linear Algebra. New Jersey: Prentice Hall.

- Kú, D., Okta?, A. & Trigueros, M. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.
- Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En Dorier, J. (Eds.). *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 191-207). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal*. Bogotá: Prentice Hall.
- Martínez, G. (2019). Una propuesta de enseñanza desde la teoría APOE del concepto de base de un espacio vectorial. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.
- Oktaç, A. & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 373-385.
- Pavlopoulou, K. (1993). Un problema decisivo para el aprendizaje del álgebra lineal: la coordinación de registros de representación. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 67-93.
- Roa-Fuentes, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transformación lineal (Tesis de Maestría no publicada). Cinvestav. México.
- Robert, A., & Robinet, J. (1989). The Meta Lever. En Dorier, J. (Eds.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 151-176). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 7-40.
- Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1996). Synthetic and analytic modes of thinking in linear algebra. Concordia University, Montreal.
- Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones Lineales en un Ambiente de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 9(003), 459-490.

## **Sobre las autoras**

Ofelia Montelongo Aguilar. Perfil PRODEP

Lorena Jiménez Sandoval. Perfil PRODEP y Candidata del SNI

Darly Alina Ku Euán. Perfil PRODEP

Docentes investigadoras de base de tiempo completo de la Unidad Académica de Matemáticas.

Integradas en el cuerpo académico UAZ-CA-223, en vías de consolidación La matemática, su enseñanza y aprendizaje que cultivan la línea de generación y aplicación del conocimiento: Perspectivas cognitivas y sociales de la enseñanza y aprendizaje, desde 2016.



## **Las entrevistas y grupos focales de docentes y estudiantes de la Unidad Académica de Matemáticas en el marco de investigaciones de matemática educativa**

*Lorena Jiménez Sandoval  
Ofelia Montelongo Aguilar  
Darly Alina Ku Euán*

### **Resumen**

El presente artículo tiene el objetivo de exponer cómo las entrevistas y grupos focales han sido empleadas en la Unidad Académica de Matemáticas (UAM) de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ) como métodos de levantamiento de información para realizar investigaciones que buscan entender los fenómenos en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, particularmente en la Licenciatura en Matemáticas. Se presentan los resultados de algunas investigaciones que, desde el ámbito del dominio afectivo, se han realizado y que buscan aportar alternativas para la solución de problemas que mejoren la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el citado programa.

*Palabras Clave:* grupos focales, entrevistas, sentido común, representaciones sociales, autoeficacia.

## **Introducción**

La investigación en el área de la Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Metropolitana (UAM[PE86]) se ha venido consolidando a partir de la incorporación, reintegración y formación de docentes investigadores especialistas en el área, al tiempo que se ofrecen diferentes aproximaciones a la comprensión de los problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática que ocurren en diversos entornos educativos de la región.

En el 2013, como parte de un proyecto de investigación titulado “Representaciones Sociales Asociadas a las Matemáticas presentes en Estudiantes y Profesores de Matemáticas” apoyado por el Fondo Sectorial de Investigación para la Educación (Clave: 178564), realizamos las primeras entrevistas en grupos focales, con los docentes de la UAM, con el propósito inicial de identificar y categorizar las representaciones sociales que tenía la planta docente sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, además de detonar una reflexión en torno al conocimiento del sentido común que, con el pensamiento científico, coexiste en las instituciones educativas.

Éste fue sólo el inicio de las investigaciones sobre aspectos relevantes del sentido común en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sobre diversos descriptores dominio-afectivo que se realizaron en la UAM a partir de ese momento y cuyo desarrollo y resultados se reportan a continuación con la finalidad de ilustrar el trabajo que docentes-investigadores y estudiantes, fundamentalmente de la Maestría en Matemática Educativa, han llevado a cabo en los últimos diez años.

## **Representaciones sociales de la planta docente**

Para Berger y Luckmann (2006) el conocimiento del sentido común es el que se comparte con otras personas en las actividades auto evidentes de la vida cotidiana y juega un papel crucial en la manera en que la gente piensa y se organiza es su ambiente habitual. Según Jodelet

(1986) el conocimiento del sentido común se constituye a partir de las experiencias, informaciones, conocimientos y modelos de pensamiento que recibimos y que también transmitimos a través de la tradición, la educación y la comunicación social.

Abric (2001) define la representación social como “una visión funcional del mundo que permite al individuo o al grupo conferir sentido a sus conductas y entender la realidad mediante su propio sistema de referencias, así como adaptar y definir de este modo un lugar para sí” (p.13), en este sentido resultaba de interés entender la visión que, sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje tenía la planta docente de la UAM y acercarnos a una comprensión de los fenómenos de deserción escolar de la Licenciatura en Matemáticas.

Para el levantamiento de la información diseñamos y aplicamos un cuestionario integrado por dos partes; en la primera se recogieron datos personales y profesionales de cada docente y la segunda se integró por tres preguntas abiertas: ¿Qué son para usted las Matemáticas?, ¿Qué es para usted aprender Matemáticas?, y ¿Qué es para usted enseñar Matemáticas? Con las respuestas y el contexto brindado, por la información personal y profesional proporcionada por 24 de 31 docentes que integraban en el 2013 la planta docente de la UAM, se generó la segunda fuente de información para la caracterización de las representaciones sociales, los grupos focales.

Rodas y Pacheco (2020), en su revisión bibliográfica descriptiva sobre los grupos focales, explican las diferentes aproximaciones conceptuales que se han acumulado a través de los años, desde sus orígenes en la investigación de la opinión pública después de la Segunda Guerra Mundial, como una fuente para obtener información de grupos de personas que resulta ventajosa porque hace posible que los participantes, en un ambiente de interacción con otros, sientan mayor libertad para expresar sus experiencias, ya sea por identificarse, o con una tendencia competitiva a relatar cosas más interesantes que los otros, sobre un tema puesto en escena por el entrevistador, permitiéndole a éste recolectar sentimientos, creencias, vivencias y pensamientos, así como identificar actitudes y reacciones de los participantes.

Con un guion de una entrevista grupal, cuya base fue el cuestionario que respondieron de manera individual, se integraron los grupos focales en los que se profundizó en las respuestas dadas por los docentes.

Escuchar las aportaciones de los docentes, algunas de manera directa y otras a través de las grabaciones, fue toda una experiencia que, además de enriquecer nuestra visión sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, nos hizo sentir que formábamos parte de una comunidad con la que compartíamos el amor por la matemática y una preocupación auténtica por mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje que redundarán en un mejor desempeño de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

El análisis de las respuestas al cuestionario y del discurso que se generó al interior de los grupos focales hizo posible la caracterización de las representaciones sociales de un grupo de docentes integrado por 13 mujeres y 11 hombres de entre 23 y 58 años de edad, 17 de ellos formados como matemáticos de manera profesional, algunos en el nivel de licenciatura, otros hasta el nivel de maestría y algunos más incluso hasta el nivel de doctorado.

Agrupados en 5 equipos; 4 de 5 integrantes y 1 de 4, analizamos las representaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Para las primeras la información se agrupó en 7 categorías, para los docentes Enseñar Matemáticas es:

- » Hacer el conocimiento más comprensible o accesible.
- » Transmitir o dar a conocer conceptos.
- » Dirigir o guiar conceptos.
- » Resolver problemas.
- » Hacer matemáticas.
- » Reproducir.
- » Hacer mi trabajo.

Según Abric (2001) toda representación está organizada alrededor de un núcleo central como elemento estabilizador y unificador de la repre-

sentación, es más resistente al cambio y permite el estudio comparativo de dos representaciones, pues es el elemento que otorga la significación y hace diferente a una representación de otra. El núcleo central es determinado, por una parte, por la relación que el sujeto, o el grupo, mantiene con dicho objeto y, por otra, por el sistema de valores y normas sociales que constituyen el entorno ideológico del momento o del grupo.

Alrededor del núcleo central se organizan los llamados elementos periféricos de la representación, cuya ponderación, valor y función están determinados por el núcleo, abarcan informaciones retenidas, seleccionadas e interpretadas, juicios formulados respecto del objeto y de su entorno, estereotipos y creencias; estos elementos están jerarquizados y aclaran e ilustran la significación de la representación.

Los elementos periféricos “constituyen la interface entre el núcleo central y la situación concreta en la que se elabora o funciona la representación y responden a tres funciones esenciales” (Abric, 2001, p. 23): función de concreción en el sentido de que resultan del anclaje de la representación en la realidad, función de regulación en tanto que son más flexibles y desempeñan un papel esencial en la adaptación de la representación a las evoluciones del contexto y la función de defensa en tanto que protege a la representación de contradicciones (Abric, 2001).

Las categorías de la representación social sobre “Aprender Matemáticas” fueron 10:

- » Es entender conceptos.
- » Conocer a profundidad conceptos.
- » Resolver problemas.
- » Adquirir/reproducir conceptos.
- » Buscar relaciones.
- » Conocer sus aplicaciones.
- » Identificar estructuras.
- » Interpretar.
- » Algo que te gusta hacer.
- » Un proceso.

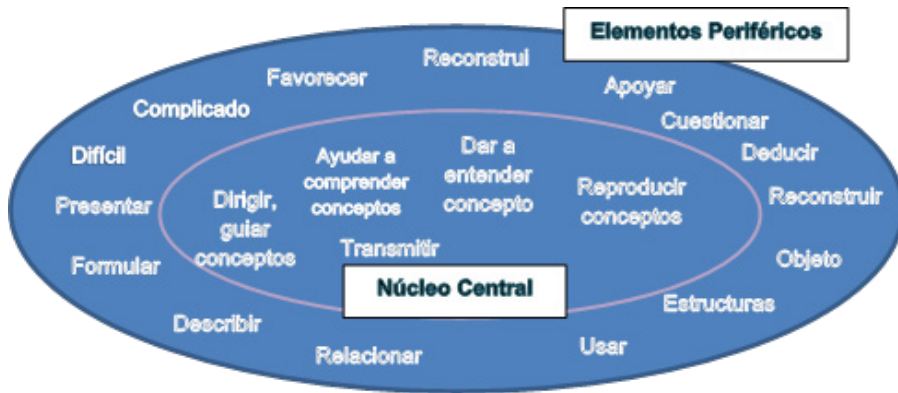
Para la interpretación de las representaciones sociales se empleó la dicotomía Constructivista-Realista que, según Flores (1998), sostiene Tymoczko (1986) como dos visiones opuestas sobre la matemática y que se asocian a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Si aceptamos una visión constructivista de las matemáticas, entonces concebimos a las matemáticas como una actividad mental, que encajará en una cierta teoría de la mente en la que se aceptaría que todos nacemos con la posibilidad de hacer matemáticas. Por otra parte, si nos situamos en la postura realista, la filosofía de la mente consiguiente, aceptaría que la mente está dotada de una facultad primitiva de intuición matemática o percepción del reino de las matemáticas (Flores 1998, p. 56). Que Flores aterriza en el ámbito didáctico diciendo:

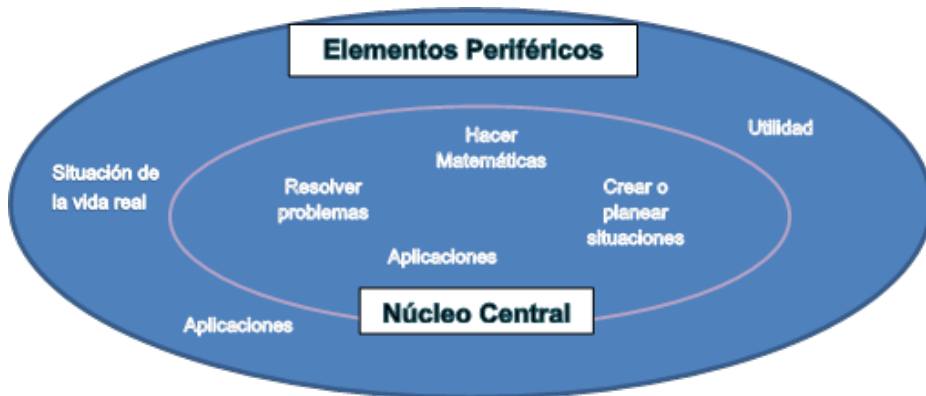
Para los realistas el conocimiento matemático es un cuerpo de conocimientos externo al sujeto que el investigador descubre. Para los constructivistas el conocimiento matemático es el inventado por el investigador ya que sólo existe en cuanto él entra en contacto y lo interpreta. Como consecuencia para partidarios del realismo epistemológico el profesor tiene que transmitir ese conocimiento externo matemático al alumno, quien se limitara a recibirlo y retenerlo. Se llama realismo didáctico a esa postura según la cual la enseñanza es la transmisión del que conoce las matemáticas al que puede recibir y decodificar este conocimiento, con lo que se considera que la matemática es un objeto de enseñanza. El constructivismo didáctico consideraría la matemática como un objeto de aprendizaje, ya que dado que el conocimiento matemático sólo es posible si el investigador lo construye, el aprendizaje matemático será posible si el alumno lo construye, lo encaja en sus estructuras mentales y lo comparte con otros.

En la Figura 1, 2, 3 y 4 se puede visualizar la estructura de las representaciones sociales sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática que se describen en la tesis de Ramírez, J. (2015).

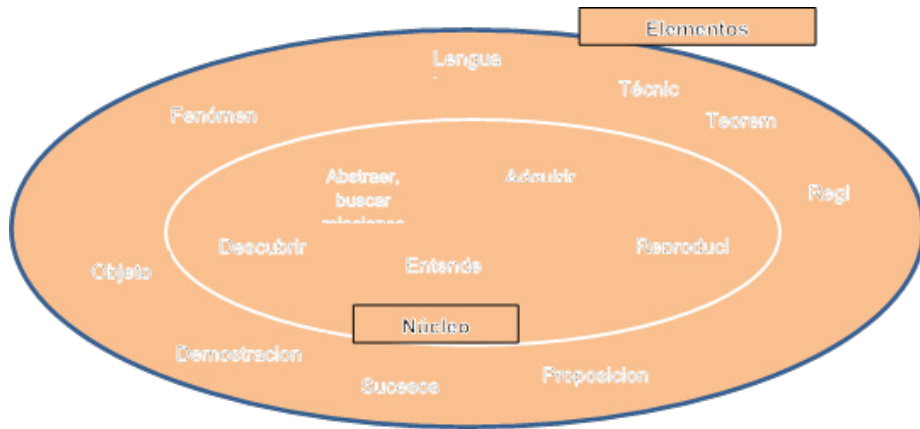
**Figura 1:** Representación Social Realista sobre la Enseñanza de la Matemática



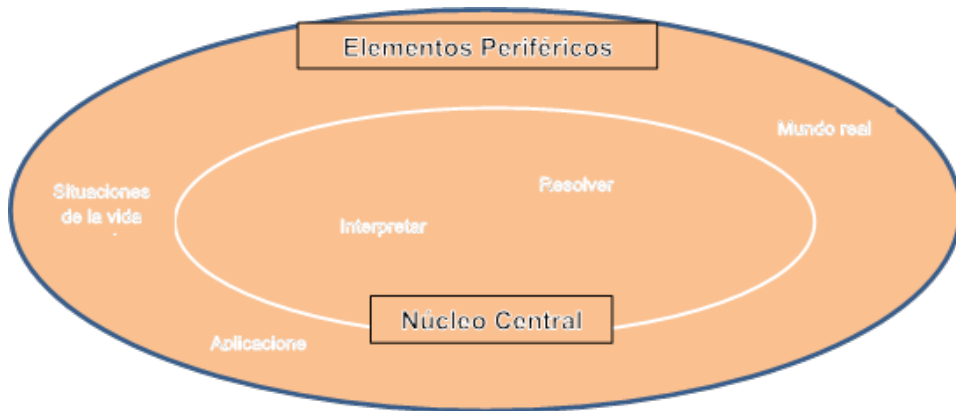
**Figura 2:** Representación Social Constructivista sobre la Enseñanza de la Matemática



**Figura 3:** Representación Social Realista sobre el aprendizaje de la Matemática



**Figura 4:** Representación Social Constructivista sobre el aprendizaje de la Matemática



## **Autoeficacia y sus fuentes. Estudiantes de la UAM**

En agosto del 2014 ingresa la primera generación de estudiantes del llamado plan de estudios D de la Licenciatura en Matemáticas, con esa generación iniciamos la implementación de entrevistas a los estudiantes de nuevo ingreso con el objetivo de entender los índices de deserción en los primeros semestres de la Licenciatura. Desde ese momento y hasta la fecha hemos realizamos una entrevista semiestructurada a aproximadamente 300 alumnos, correspondientes a los ingresos anuales de 2014 hasta el 2022, luego de que los estudiantes concluyen el curso propedéutico.

De acuerdo a Díaz-Bravo (et al., 2013) la entrevista es un instrumento técnico que adopta la forma de un diálogo coloquial a manera de una comunicación entre el investigador y el entrevistado, hace posible aclarar dudas mientras se responde garantizando obtener datos más útiles para los fines de la investigación que se realiza. La entrevista semiestructurada es flexible y puede adaptarse para motivar o reducir formalismos durante su aplicación.

Todas las entrevistas que hemos realizado han sido videograbadas y algunas de ellas transcritas para ser empleadas en investigaciones específicas como la reportada en el artículo *Experiences of Mexican teenage students when choosing a math degree: A mathematical narrative identity study*, de Martínez-Sierra, Cervantes-Barraza & Jiménez Sandoval, publicado por Uniciencia en el 2021. De acuerdo a los resultados de este artículo las creencias de autoeficacia, entendidas como el juicio que tienen las personas sobre sus propias capacidades para alcanzar determinado nivel de desempeño en el aprendizaje de la matemática, se configuran como un predictor clave en la decisión que toma un estudiante para elegir la carrera de matemáticas para su formación profesional.

Bandura (1994) explica que las creencias de autoeficacia contribuyen a la motivación determinando las metas que las personas establecen para sí mismos, la cantidad de esfuerzo que invierten en alcanzarlas, el tiempo que perseveran en él ante las dificultades y la capacidad

de resistencia ante las fallas. Considera que cuatro son las fuentes principales que conforman a lo largo del tiempo las creencias de autoeficacia: las experiencias de dominio, las experiencias vicarias, la persuasión social y las reacciones al estrés.

Las experiencias de dominio son aquellas experiencias que requieren de la superación de obstáculos mediante el esfuerzo perseverante, esto permite que las personas se convenzan de que tienen lo necesario para tener éxito y perseverar ante la adversidad recuperándose rápidamente de los reveses.

Las experiencias vicarias son proporcionadas por los modelos sociales, esto es por la comparación de las propias capacidades con las de los demás. El ser observador del éxito o fracaso de personas con características similares a las de uno mismo, genera conocimiento en torno a las habilidades y estrategias eficaces para la gestión de las demandas del entorno. Por el contrario, si los modelos son muy diferentes a uno mismo, la autoeficacia no se ve influida por éstos.

Las personas que son persuadidos verbalmente sobre el hecho de que poseen la capacidad de dominar ciertas actividades, son propensos a movilizar un mayor esfuerzo y sostenerlo, a diferencia de aquellas que tienen dudas sobre sí mismos y se detienen a pensar en las deficiencias personales cuando deben resolver problemas. Generar creencias de alta eficacia mediante la persuasión social es más difícil que contribuir a generar creencias de baja o nula eficacia. Las personas que han sido persuadidas sobre la carencia de capacidades, tienden a evitar actividades desafiantes que cultivan potencialidades y renunciar de forma rápida de cara a las dificultades.

Las reacciones al estrés de las personas alteran su estado emocional, si esta alteración es interpretada de manera negativa, como un signo de vulnerabilidad, se generará una creencia de bajo nivel de eficacia. Si el estado de ánimo se interpreta de manera positiva, la excitación afectiva se cataliza como un energizante de rendimiento y aumenta la percepción de autoeficacia.

En Martínez-Sierra (et al., 2021) se adopta la conceptualización de identidad narrativa como la historia de vida matemática internalizada

y en evolución de una persona, integrando el pasado reconstruido y el futuro imaginado para proporcionar, a la vida matemática, cierto grado de unidad y propósito (p. 6).

La investigación se centró en identificar la motivación de los estudiantes para elegir la carrera de matemáticas empleando un estudio de caso en el que se analizaron múltiples casos delimitados por tiempo y una actividad. A través de un análisis temático se encontraron tres motivaciones: el gusto por las matemáticas, las creencias de autoeficacia y el deseo de convertirse en un “buen maestro de matemáticas”; dos expectativas futuras: convertirse en un buen profesor de matemáticas y aprender muchas matemáticas; además de cuatro fuentes motivacionales: creencias de autoeficacia, experiencias de dominio, experiencias vicarias y la experiencia de tener “buenos profesores de matemáticas”, los resultados se consideraron por los autores como consistentes con otros estudios reportados en el artículo.

Entre las conclusiones más importantes del citado artículo se encuentra el hecho de que “ser bueno en matemáticas” es muy apreciado por los 47 estudiantes que formaban parte de la primera generación del plan de estudios D, esto representa un componente importante de la identidad narrativa matemática. De acuerdo con esta conclusión, “ser bueno en matemáticas” es considerado por los estudiantes como una fuente de prestigio, una característica positiva que los distingue de sus pares, desde este punto de vista, la reputación ganada al “ser bueno en matemáticas” se convierte en la principal motivación para elegir una carrera de matemáticas. Una posible fuente de esta alta apreciación se asocia al hecho de que las matemáticas son consideradas en amplios sectores sociales de México y específicamente de Zacatecas, como “realmente difíciles”, de esta manera ser bueno en matemáticas es una expresión de tener una inteligencia superior.

En este mismo sentido, la citada característica de la identidad narrativa de los estudiantes que se hace presente en las respuestas dadas en las entrevistas realizadas al resto de los estudiantes de las otras generaciones que ingresaron a la Licenciatura en Matemáticas a partir del 2014, podría explicar la deserción de los estudiantes en los primeros semestres.

Si bien de acuerdo a Bandura (1994) las creencias de autoeficacia conformadas con base en las experiencias de dominio son las que refuerzan la perseverancia para superar los obstáculos, una cadena sucesiva de fracasos, puede ser interpretada también como una amenaza. En el 100% de las entrevistas realizadas como respuesta a la pregunta ¿por qué elegiste o que te motivó a estudiar la carrera de matemáticas? están presentes frases como: “soy bueno en matemáticas”, “se me dan las matemáticas”, “siempre se me han facilitado”, “no se me complican” “para mí son como un juego”, “les entiendo muy bien”, “siempre he sacado muy buenas calificaciones” “es la materia que más se me facilita”, es decir todos los entrevistados tienen un alto sentido de autoeficacia aun cuando la fuente de estas creencias no necesariamente fueron las experiencias de dominio. De este modo, los desafíos que enfrentan cuando ingresan a la carrera y que no son “superados” con el éxito esperado representan una amenaza para la autoconfianza que habían desarrollado hasta ese momento.

Que las dificultades generen dudas es una reacción natural inmediata, la complicación ocurre más bien en la rapidez con la que se recupera o no la autoconfianza. Las personas generalmente tendemos a equivocarnos en nuestras autoevaluaciones de modo que tendemos también a sobreestimar nuestras capacidades. La percepción de ineficacia opera como un mediador cognitivo de la ansiedad, sin embargo, no es la ansiedad sino la creencia de que no podremos hacer frente a situaciones que consideramos riesgosas las que hacen irregular nuestro pensamiento analítico y esto afecta, a su vez, nuestros logros de rendimiento (Bandura, 1989).

En la tesis de Carmona (2021), en la que se reportan las creencias de autoeficacia y su impacto en el desempeño y logro de 15 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la UAM durante los primeros 18 meses de su carrera, se reporta también cómo, después de 14 meses de cursar la carrera, los niveles de autoeficacia tuvieron una disminución que impactó de manera negativa en el logro y desempeño de los estudiantes.

Empleando dos escalas de autoeficacia percibida que se aplicaron a la generación de estudiantes que ingresó en el 2018 y dos cuestio-

narios de problemas, así como los resultados de las entrevistas que se aplicaron en el momento de su ingreso, se encontró que las cuatro fuentes de las creencias de autoeficacia dadas por Bandura (1994) estaban presentes y se identificó además un “refinamiento” de la fuente de persuasión social cuya interpretación generó una división en “persuasión social directa” y “persuasión social indirecta” y se consideró una fuente adicional “experiencia de deseo por contribuir” que se encontró en dos estudiantes y cuyas respuestas no encajaron, según Carmona (2021), con ninguna de las otras fuentes de acuerdo con los códigos establecidos durante el análisis temático.

Las experiencias de dominio se identificaron en los 15 estudiantes, al mismo tiempo que las experiencias vicarias forman parte del origen de las creencias de autoeficacia en 11 de los 15 estudiantes. Para la “medición” del nivel de autoeficacia se empleó el concepto de calibración que establece una relación entre los niveles de autoeficacia y el logro. Los resultados mostraron que los niveles de autoeficacia superaron el logro en los datos recogidos en la primera aplicación de la escala y que dichos niveles eran más bajos respecto del logro obtenido dieciocho meses después de haber ingresado a la carrera.

## **A manera de cierre**

El presente artículo no intentó presentar una revisión exhaustiva de las investigaciones que desde la Matemática Educativa se han realizado en la UAM-UAZ, se realizó más bien a manera de reflexión desatada por el 40 aniversario de su fundación en la idea de exponer un recorrido por el trabajo de investigación en el que hemos participado de manera personal y como integrantes de diferentes equipos de colegas que mantenemos un esfuerzo sostenido por entender los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la UAM.

Los resultados representan sólo una aproximación desde el ámbito del dominio afectivo, otros acercamientos como el de Martínez Sierra (2014) a las experiencias emocionales de 27 estudiantes de la UAM que en 2014 cursaban álgebra lineal al igual que el realizado por Montelon-

go (2016) en su tesis doctoral en la que se reporta la comprensión del concepto de matriz asociada a una transformación lineal y las estructuras y mecanismos mentales que requieren 15 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que cursaron Álgebra Lineal II en el semestre agosto diciembre del 2014 desde la teoría APOE y la tesis de Pichardo (2021) quien caracteriza, en un estudio de caso, las actitudes del profesor del nivel superior.

Representa una gran satisfacción hacer una revisión a través de los años del trabajo realizado desde la docencia e investigación en la UAM y que es posible revivirlo con base en lecturas de documentos que continuarán presentes en el océano de la información a la que se tendrá acceso por siempre.

## Referencias

- Abric, J. C. (2001). *Prácticas sociales y representaciones*. Ediciones Co-yocán.
- Bandura, A. (1994). Self-efficacy. In V. S. Ramachaudran (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (Vol. 4, pp. 71-81). Academic Press. H Friedman.
- Bandura, A. (1989). Human agency in social cognitive theory. *American Psychologist*, 44 (9), p. 1175-1184.
- Berger, P. L. y Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Amorrutu.
- Carmona, F. I. (2021) *Las creencias de autoeficacia y su impacto en el logro y desempeño académico de estudiantes de una licenciatura en matemáticas* [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Zacatecas]. <http://ricaxcan.uaz.edu.mx/jspui/handle/20.500.11845/2867>
- Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M. y Varela-Ruiz, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. *ELSEVIER*, 2 (7), p. 162-167.
- Flores, P. (1998) *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. COMARES.
- Flores, P. *Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza*. <https://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/UNOTesis.pdf>
- Jodelet, D. (1986). La representación social: fenómenos, conceptos y teoría. In S. Moscovici (Ed.), *Psicología Social II : Pensamiento y vida social* (pp. 469-494). Páidos.
- Martínez-Sierra, G., Cervantes-Barraza, J. & Jiménez Sandoval, L. (2021) *Experiences of Mexican teenage students when choosing a math degree: A mathematical narrative identity study*. *Uniciencia*, 35(1), 1-23. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.15>
- Martínez-Sierra, G. (2014). *Experiencias emocionales de estudiantes en*

sus cursos de álgebra lineal. Memoria de la XVII Escuela de Invierno de Matemática Educativa. La Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa. <http://funes.unian-des.edu.co/16732/1/Martinez2015Experiencias.pdf>

Montelongo, O. (2016). Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal [Tesis de Doctorado de la Universidad Autónoma de Guerrero].

Pichardo, F. (2012). Caracterización de las actitudes del profesor de nivel superior. Un estudio de caso [Tesis de Maestría de la Universidad Autónoma de Zacatecas]. <http://ricaxcan.uaz.edu.mx/xmlui/handle/20.500.11845/2848>

Ramírez, J. (2015) Representaciones sociales sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Profesores De La UAM-UAZ [Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Zacatecas].

Rodas, F. y Pacheco, V. (2020). Grupos focales: marco de referencia para su implementación. INNOVA Research Journal, 5 (3), pp. 182-195. <https://doi.org/10.33890/innova.v5.n3.2020.1401>

### **Sobre las autoras**

Lorena Jiménez Sandoval. Perfil PRODEP y Candidata del SNI

Ofelia Montelongo Aguilar. Perfil PRODEP

Darly Alina Ku Euán, Perfil PRODEP

Docentes investigadoras de base de tiempo completo de la Unidad Académica de Matemáticas integradas en el cuerpo académico UAZ-CA-223, en vías de consolidación La matemática, su enseñanza y aprendizaje que cultivan la línea de generación y aplicación del conocimiento: Perspectivas cognitivas y sociales de la enseñanza y aprendizaje, desde 2016.









El libro Unidad Académica de Matemáticas a 40 años de su fundación, es una muestra del trabajo de investigación y divulgación de la matemática, matemática aplicada y matemática educativa que quizá solo existía en el imaginario del entonces Centro de Matemáticas, y que durante algunos años tuvo un tránsito difícil pero que finalmente se abrió camino consolidando la hoy Unidad Académica de Matemáticas, que cuenta con tres programas de licenciatura y tres programas de posgrado. Las narrativas expresan la complacencia que cada uno encontró en las aulas de la Licenciatura en Matemáticas, en las actividades de MIIMAZ y de la Olimpiada de Matemáticas, que siguen siendo parte importante de las diversificadas acciones que se inician todos los días a primera hora de la mañana en dicha Unidad Académica.

Cada uno de los autores incluidos en el libro, alumnos, exalumnos, docentes en activo y jubilados, son también ejemplo de un tesón como cualidad de la personalidad de los que formamos parte de la Unidad Académica de Matemáticas, y que sostenemos desde sus entrañas el trabajo cotidiano de docencia, investigación, extensión, vinculación y divulgación de la matemática en los diferentes escenarios en donde es posible su expresión.

La lectura de Unidad Académica de Matemáticas a 40 años de su fundación, dejará una sensación de esperanza de cómo es posible la coexistencia de visiones, trabajo de investigación y experiencias diversas en la convivencia del día a día que marca la vida de quienes se atreven a formar parte de esta comunidad.

